

HAUPTAUFsätze

Zur graphischen Konstruktion von Trajektorien in Strömungsfeldern.

Von *Hans Ertel* in Berlin.

Zur Lösung des Gleichungssystems, dem die kleinen Koordinatendifferenzen zweier benachbarter Punkte einer Trajektorie genügen müssen, wird ein neues sukzessives Approximationsverfahren angegeben und in eine graphische Methode zur punktweisen Trajektorienkonstruktion übertragen.

A new method of successive approximations for the solution of a system of equations to evaluate the small coordinate differences of two neighbouring points of a trajectory is stated and transformed into a graphic method for the point for point construction of trajectories.

L'auteur donne une nouvelle méthode d'approximations successives pour la solution du système d'équations que les petites différences de coordonnées de deux points voisins doivent remplir. Ensuite il transforme cette méthode en une méthode graphique servant à construire point par point une trajectoire.

Для решения системы уравнений, которым должны удовлетворять малые разности координат двух соседних точек траектории частицы жидкости, дается новый метод последовательного приближения, который может быть преобразован в графический метод построения траектории от точки до точки.

I. Die analytische Grundlage des Konstruktionsverfahrens.

Es seien P mit den orthogonalen kartesischen Koordinaten $x = a$, $y = b$ und P_0 mit den Koordinaten $x = X$, $y = Y$ zwei Punkte einer Trajektorie in einem zweidimensionalen Strömungsfeld. P werde zur Zeit $t = -\tau$ mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}(\bar{\mathbf{r}} - \mathbf{r}, -\tau)$ und P_0 zur Zeit $t = 0$ von demselben Flüssigkeitsquantum mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}(\bar{\mathbf{r}}, 0)$ durchlaufen, wobei

$$\bar{r} = (X, Y) \dots \dots \dots (1)$$

den Ortsvektor von P_0 und

$$\mathbf{r} = (X - a, Y - b) \dots \dots (2)$$

den Vektor der Koordinatendifferenzen von P und P_0 bedeutet (Bild 1; Kurve $TPP_0 =$ Trajektorie).

Bei vorgegebenem P_0 liefert der Anfangspunkt von τ den zu einer früheren Zeit $t = -\tau$ durchlaufenen Trajektorienpunkt P .

Wie ich kürzlich gezeigt habe [Lit. (1)], genügt für ein hinreichend kleines Zeitintervall $-\tau \leq t \leq 0$ der Differenzvektor r dem Gleichungssystem

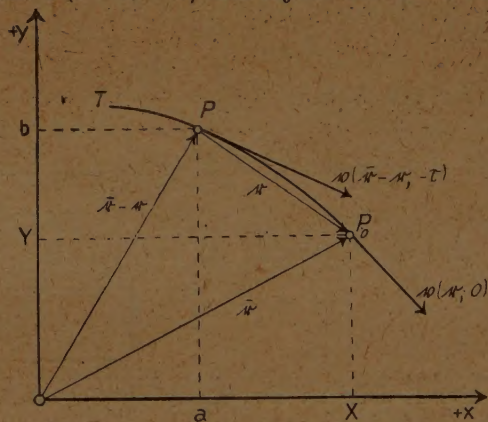


Bild 1.

$$r = \frac{\tau}{2} \left\{ v(\bar{r}, 0) + v(\bar{r} - r, -\tau) \right\} \dots \dots \dots (3)$$

und kann durch eine konvergente Vektorfolge $\mathbf{r}^{(n)} (n=0, 1, 2, 3, \dots)$ mit $\mathbf{r} = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{r}^{(n)}$ mittels sukzessiver Approximation aus den Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{r}^{(0)} &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{r}^{(1)} &= \frac{\tau}{2} \left\{ \mathbf{v}(\bar{\mathbf{r}}, 0) + \mathbf{v}(\bar{\mathbf{r}} - \mathbf{r}^{(0)}, -\tau) \right\}, \\ \mathbf{r}^{(2)} &= \frac{\tau}{2} \left\{ \mathbf{v}(\bar{\mathbf{r}}, 0) + \mathbf{v}(\bar{\mathbf{r}} - \mathbf{r}^{(1)}, -\tau) \right\}, \\ &\dots = \dots \\ \mathbf{r}^{(n+1)} &= \frac{\tau}{2} \left\{ \mathbf{v}(\bar{\mathbf{r}}, 0) + \mathbf{v}(\bar{\mathbf{r}} - \mathbf{r}^{(n)}, -\tau) \right\}, \\ &\dots = \dots \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (4)$$

wobei die Konvergenz des Verfahrens durch die Konvergenz der Reihe

$$\sum_0^{\infty} |\delta \hat{s}^{(n)}| = \sum_0^{\infty} |\sqrt{(\delta s_x^{(n)})^2 + (\delta s_y^{(n)})^2}| \dots \dots \dots (14)$$

mit

$$\delta \hat{s}^{(n)} = \hat{s}^{(n+1)} - \hat{s}^{(n)} \dots \dots \dots (15)$$

gewährleistet ist. Eine Taylor-Entwicklung der rechten Seiten von (12) um den Punkt \hat{P} des Stromfeldes zur Zeit $t = -\tau$ ergibt zunächst:

$$\left. \begin{aligned} \delta s_x^{(n+1)} &= -\frac{\tau}{2} (\delta \hat{s}^{(n)} \text{ grad}) v_x, \\ \delta s_y^{(n+1)} &= -\frac{\tau}{2} (\delta \hat{s}^{(n)} \text{ grad}) v_y, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (16)$$

also nach der Schwarzschen Ungleichung:

$$\left. \begin{aligned} (\delta s_x^{(n+1)})^2 &\leq \frac{\tau^2}{4} |\delta \hat{s}^{(n)}|^2 m_x^2, \\ (\delta s_y^{(n+1)})^2 &\leq \frac{\tau^2}{4} |\delta \hat{s}^{(n)}|^2 m_y^2, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (17)$$

woraus weiter

$$|\delta \hat{s}^{(n+1)}| \leq \frac{\tau}{2} |\delta \hat{s}^{(n)}| \sqrt{m_x^2 + m_y^2} \dots \dots \dots (18)$$

folgt, so daß nach dem Cauchyschen Quotientenkriterium

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\delta \hat{s}^{(n+1)}}{\delta \hat{s}^{(n)}} \right| < 1 \dots \dots \dots (19)$$

das Verfahren für

$$\tau < \frac{2}{\sqrt{m_x^2 + m_y^2}} \dots \dots \dots (20)$$

konvergiert, wobei die m_x, m_y gemäß (6), jetzt aber für den Punkt \hat{P} zur Zeit $t = -\tau$ zu bilden sind.

II. Graphische Konstruktion einer Trajektorie.

Eine graphische Lösung des Systems (12) ist in folgender Weise möglich: Gegeben sei das zweidimensionale Stromweg-Feld $\mathfrak{B}(x, y, -\tau) = \frac{\tau}{2} v(x, y, -\tau)$ zur Zeit $t = -\tau$, und

in dem vorgegebenen Punkt P_0 werde der Stromweg $\mathfrak{B}(X, Y, 0) = \frac{\tau}{2} v(X, Y, 0)$ der dortigen Strömung $v(X, Y, 0)$ zur Zeit $t = 0$ eingetragen (Bild 3) und rückwärts verschoben, so daß der Anfangspunkt des Vektors $\mathfrak{B}(\vec{r}, 0)$ den

Punkt \hat{P} (= Endpunkt von \vec{r}) liefert. Wird $\mathfrak{B}(\vec{r}, 0)$ nochmals um seinen Absolutbetrag rückwärts verschoben, so erhält man in dem Punkt P^0 (= $\vec{r} - \mathfrak{B}(\vec{r}, 0)$) die „nullte Näherung“ $\vec{r}^{(0)}$. Hier in P^0 entnehme man aus der Strömungskarte zur Zeit $t = -\tau$ den Stromweg $\mathfrak{B}(\vec{r} - \hat{s}^{(0)}, -\tau)$ und bringe ihn durch Parallelverschiebung in die Lage $P^1\hat{P}$; dann ist P^1 die 1. Näherung $\vec{r}^{(1)}$. Im Punkte P^1 entnimmt man nun der Karte den Stromweg $\mathfrak{B}(\vec{r} - \hat{s}^{(1)}, -\tau)$ für diesen Punkt, bringt ihn durch Parallelverschiebung in

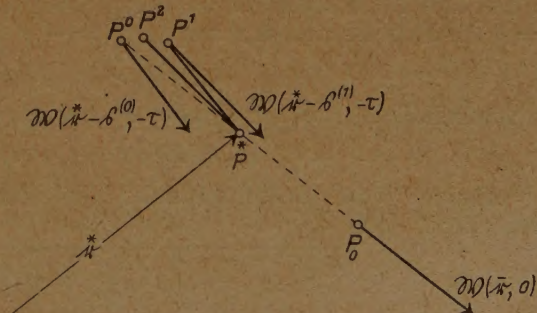


Bild 3.

die Lage $P^2\hat{P}$ und erhält so mit dem Punkt P^2 die 2. Näherung $\vec{r}^{(2)}$ usw., wobei das Verfahren als zu einem Punkt P^n fortgesetzt werden kann, für den der nächste Schritt keine Verbesserung innerhalb der Zeichnungsgenauigkeit mehr bringt. P^n ist dann die innerhalb der Zeichnungs-

genauigkeit beste Approximation des gesuchten Trajektorienpunktes P , der zur Zeit $t = -\tau$ von demselben Flüssigkeitsquantum durchlaufen wird, welches zur Zeit $t = 0$ in P_0 eintrifft. Die Trajektorie zwischen P und P_0 ist ein leicht zu zeichnendes Kurvenstück, da dessen Tangentenrichtung in P mit der Richtung des dortigen Stromweg-Vektors $\mathfrak{B}(\bar{\tau} - \bar{s}, -\tau)$ zur Zeit $t = -\tau$ und in P_0 mit der Richtung des Stromweg-Vektors $\mathfrak{B}(\bar{\tau}, 0)$ zur Zeit $t = 0$ übereinstimmen muß (Lit. [2]).

Es sei bemerkt, daß sowohl die Approximationen des hier beschriebenen Verfahrens als auch diejenigen der kürzlich von mir entwickelten Methode (a. a. O., Lit. [1]) gegen denselben Punkt P , nämlich den Anfangspunkt des durch das Gleichungssystem (3) bestimmten Differenzvektors τ konvergieren, nur ist die Art der Konvergenz in beiden Fällen verschieden. Alle zur Lösung des Systems (3) möglichen Approximationsverfahren liefern Endresultate, die miteinander übereinstimmen müssen und sich somit gegenseitig kontrollieren; sie sind (innerhalb der Konvergenz-Zeitintervalle) nur durch die Genauigkeit der Strömungskarten begrenzt und unvergleichlich zuverlässiger als die der bisher z. B. in der dynamischen Meteorologie angewandten Verfahren (Lit. [3–6]). Ein kürzlich von J. J. George (Lit. [7]) ohne analytische Begründung vorgeschlagenes Verfahren beruht in unserer Bezeichnungsweise auf der Formel

$$\tau = \frac{\tau}{2} \{v(\bar{\tau}, 0) + v(\bar{\tau} - \tau v(\bar{\tau}, 0), -\tau)\} = \mathfrak{B}(\bar{\tau}, 0) + \mathfrak{B}(\bar{\tau} - \bar{s}^{(0)}, -\tau) \quad (21)$$

und ist somit nach (9) und (12) einfach mit der 1. Näherung $\tau^{(1)} = \mathfrak{B}(\bar{\tau}, 0) + \bar{s}^{(1)}$ der hier entwickelten Methode identisch, liefert also als 1. Näherung im allgemeinen noch kein zuverlässiges Ergebnis.

Ferner sei bemerkt, daß die Gleichung (3) in gleicher Näherung, nämlich in den Termen 1. Ordnung der Taylor-Entwicklung, mit der Formel

$$\tau = \tau v\left(\bar{\tau} - \frac{1}{2}\tau, -\frac{\tau}{2}\right) \quad (22)$$

übereinstimmt, der prognostische Bedeutung zukommt, indem sie aus dem Strömungsfeld zur Zeit $t = -\tau/2$ vorauszuberechnen gestattet, welches Flüssigkeitsquantum zur späteren Zeit $t = 0$ an einem vorgegebenen Ort eintrifft, wie ich an anderer Stelle ausgeführt habe (Lit. [8]).

III. Verwendung geographischer Koordinaten bei geophysikalischen Anwendungen.

Bei Bezugnahme auf orthogonale kartesische Koordinaten (x, y) lautet das System (3):

$$\begin{aligned} r_x &= \frac{\tau}{2} \{v_x(X, Y, 0) + v_x(X - r_x, Y - r_y, -\tau)\}, \\ r_y &= \frac{\tau}{2} \{v_y(X, Y, 0) + v_y(X - r_x, Y - r_y, -\tau)\} \end{aligned} \quad (23)$$

Geophysikalische Anwendungen erfordern aber in der Regel die Verwendung der geographischen Koordinaten λ (geogr. Länge), φ (geogr. Breite) und h (Seehöhe), bei horizontalen Strömungen ($h = \text{const.}$) also die Verwendung der Koordinaten λ und φ . Es seien nun λ_0, φ_0 die Koordinaten des Punktes P_0 , der zur Zeit $t = 0$ von dem Flüssigkeitsquantum durchlaufen wird, und $\lambda = \alpha, \varphi = \beta$ die Koordinaten des zur Zeit $t = -\tau$ durchlaufenen Punktes P , ferner

$$L_\lambda = \lambda_0 - \alpha, \quad L_\varphi = \varphi_0 - \beta \quad (24)$$

die Winkeldifferenzen der Punkte P und P_0 der Trajektorie und

$$\Omega_\lambda = d\lambda/dt = v_\lambda/r \cos \varphi, \quad \Omega_\varphi = d\varphi/dt = v_\varphi/r \quad (25)$$

(r = Abstand vom Erdmittelpunkt) die Winkelgeschwindigkeiten der Flüssigkeitspartikel, dann gilt:

$$\begin{aligned} L_\lambda &= \frac{\tau}{2} \{\Omega_\lambda(\lambda_0, \varphi_0, 0) + \Omega_\lambda(\lambda_0 - L_\lambda, \varphi_0 - L_\varphi, -\tau)\}, \\ L_\varphi &= \frac{\tau}{2} \{\Omega_\varphi(\lambda_0, \varphi_0, 0) + \Omega_\varphi(\lambda_0 - L_\lambda, \varphi_0 - L_\varphi, -\tau)\}, \end{aligned} \quad (26)$$

wie nachstehend bewiesen wird. Der Vergleich von (26) mit (23) zeigt, daß das oben beschriebene Verfahren in gleicher Weise angewandt werden kann, wenn die Kurven $\Omega_\lambda(\lambda, \varphi, -\tau) = \text{const.}$

und $\Omega_\varphi(\lambda, \varphi, -\tau) = \text{const.}$ in ein orthogonales kartesisches Koordinatensystem $x = \lambda, y = \varphi$ übertragen werden (so daß man für jeden Koordinatenwert Ω_λ und Ω_φ ablesen kann) und dazu die zwei Werte $\Omega_\lambda(\lambda_0, \varphi_0, 0)$ und $\Omega_\varphi(\lambda_0, \varphi_0, 0)$, denn es entsprechen einander:

$x, y; X, Y; r_x, r_y; v_x, v_y$ (kartes. Koordinaten)

$\lambda, \varphi; \lambda_0, \varphi_0; L_\lambda, L_\varphi; \Omega_\lambda, \Omega_\varphi$ (geogr. Koordinaten).

Der noch ausstehende Beweis des Systems (26) ergibt sich folgendermaßen: Wählen wir α, β als Lagrangesche Numerierungskordinaten der einzelnen Flüssigkeitspartikel des Stromfeldes, so gilt

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\alpha}{dt} &= \left(\frac{\partial}{\partial t} + \Omega_\lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} + \Omega_\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \alpha = 0, \\ \frac{d\beta}{dt} &= \left(\frac{\partial}{\partial t} + \Omega_\lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} + \Omega_\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \beta = 0, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (27)$$

oder wegen (25):

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \Omega_\lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} + \Omega_\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) (\lambda - \alpha) &= \Omega_\lambda(\lambda, \varphi, t), \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \Omega_\lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} + \Omega_\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) (\varphi - \beta) &= \Omega_\varphi(\lambda, \varphi, t), \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (28)$$

und ersetzen wir zwecks Integration für ein kleines Zeitintervall $-\tau \leq t \leq 0$ in dem substantiellen Differentialoperator

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \Omega_\lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} + \Omega_\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

die $\Omega_\lambda, \Omega_\varphi$ durch die Mittelwerte

$$\overline{\Omega}_\lambda = \frac{1}{\tau} \int_{-\tau}^0 \Omega_\lambda dt = L_\lambda / \tau, \quad \overline{\Omega}_\varphi = \frac{1}{\tau} \int_{-\tau}^0 \Omega_\varphi dt = L_\varphi / \tau \dots \dots \dots (29)$$

der Winkelgeschwindigkeiten der Teilchenbewegung von P nach P_0 , so folgt

$$\lambda - \alpha = \int_{-\tau}^t \Omega_\lambda(\lambda - \overline{\Omega}_\lambda(t - \zeta), \varphi - \overline{\Omega}_\varphi(t - \zeta), \zeta) d\zeta \dots \dots \dots (30)$$

und eine entsprechende Gleichung für $\varphi - \beta$. Für den Punkt $\lambda = \lambda_0, \varphi = \varphi_0$, der zur Zeit $t = 0$ erreicht wird, ergibt sich also mit Rücksicht auf (24):

$$L_\lambda = \int_{-\tau}^0 \Omega_\lambda(\lambda_0 + \overline{\Omega}_\lambda \zeta, \varphi_0 + \overline{\Omega}_\varphi \zeta, \zeta) d\zeta \dots \dots \dots (31)$$

und eine entsprechende Gleichung für L_φ . Nach einer Taylor-Entwicklung des Integranden um den Raum-Zeit-Punkt $\lambda_0, \varphi_0, t = 0$ folgt dann mit Rücksicht auf (29):

$$L_\lambda = \frac{\tau}{2} \left\{ 2 \Omega_\lambda(\lambda_0, \varphi_0, 0) - L_\lambda \frac{\partial \Omega_\lambda}{\partial \lambda} - L_\varphi \frac{\partial \Omega_\lambda}{\partial \varphi} - \tau \frac{\partial \Omega_\lambda}{\partial t} \right\}$$

also übereinstimmend mit

$$L_\lambda = \frac{\tau}{2} \left\{ \Omega_\lambda(\lambda_0, \varphi_0, 0) + \Omega_\lambda(\lambda_0 - L_\lambda, \varphi_0 - L_\varphi, -\tau) \right\} \dots \dots \dots (32)$$

bis auf Terme höherer Ordnung, und eine entsprechende Gleichung ergibt sich für L_φ .

Literatur.

- [1] H. Ertel: Ein neues Verfahren zur Konstruktion von Trajektorien in Strömungsfeldern. Z. angew. Math. Mech., Bd. 28 (1948), S. 270—274.
- [2] L. Prandtl u. O. Tietjens: Hydro- und Aeromechanik, I. Bd., S. 67—68. Berlin 1929.
- [3] W. N. Shaw and R. G. K. Lemphert: The Life History of Surface Air Currents. London 1906.
- [4] F. M. Exner: Dynamische Meteorologie. 2. Aufl., S. 72 u. 265ff. Wien 1925.
- [5] Hann-Süring: Lehrbuch der Meteorologie. 5. Aufl., S. 498. Leipzig 1939.
- [6] S. P. Chromow: Einführung in die synoptische Wetteranalyse. 2. Aufl., S. 74—77. Wien 1942.
- [7] J. J. George: Bull. American Met. Soc., Vol 21 (1940), S. 147.
- [8] H. Ertel: Eine Methode zur approximativen Vorausberechnung von Luftmassenverlagerungen. Abh. Dt. Akad. d. Wiss. Berlin 1948.

Eingegangen, den 8. März 1948.

Die hydrodynamischen Gleichungen der ausgeglichenen Bewegung in turbulenten Strömungen.

Von E. Hardtwig in Stuttgart.

Die Differentialgleichungen für die ausgeglichene Bewegung eines turbulent strömenden Gases (bzw. einer Flüssigkeit) werden abgeleitet. Vorausgesetzt wird das Erfülltsein einer geringen Anzahl von plausiblen Postulaten. Wesentliches Hilfsmittel bei der Herleitung ist eine „Transportgleichung“ im Maxwell'schen Sinn. Um die Differentialgleichungen der ausgeglichenen Bewegung an jene für laminar bewegte, viskose Flüssigkeiten (Navier-Stokes) anzugleichen, ist es nötig, den Prandtl'schen Mischungswegansatz durch einen allgemeineren zu ersetzen.

The differential equations for the smoothed motion of turbulently moving gas (resp. fluid) are derived with the assumption of a little number of plausible postulates. Essential aid is given by deducing a „transporting equation“ in the sense of Maxwell. To assimilate the differential equations of the smoothed motion to that of the laminar motion of viscous fluids (Navier-Stokes) it is necessary to replace the statement of the „way of mixture“ by Prandtl by a more general one.

Les équations différentielles pour le mouvement compensé d'un gas (ou d'un liquide) s'écoulant turbulamment sont dérivées en exigeant la validité de quelques postulats plausibles. L'auteur se sert pour la dérivation surtout d'une „équation de transport“ au sens de Maxwell. Pour adapter les équations différentielles du mouvement compensé au mouvement laminaire de liquides visqueux (Navier-Stokes), on doit remplacer les conditions du „chemin de mélange“ de Prandtl par des conditions plus générales.

Исходя из небольшого числа вероятных постулатов выводятся дифференциальные уравнения среднего движения вихревого потока газа (или жидкости). Существенным вспомогательным средством при этом выводе является согласно методу Максвелла „транспортное уравнение“. Для того, чтобы дифференциальные уравнение среднего движения привести к виду дифференциальных уравнений Навье-Стокса для невихревого течения вязкой жидкости, нужно условие Прандтля для среднего пути заменить более общим условием.

1.

Die Aussichtslosigkeit jeder Bemühung, die Bewegung eines einzelnen Teilchens einer turbulent verlaufenden Bewegung durch ein System von Differentialgleichungen zu beschreiben, muß notwendig zu dem Versuch führen, turbulente Strömungen durch „ausgeglichen“ zu ersetzen, um diese dann einer mathematischen Beschreibung zugänglich zu machen. Der Übergang von der „mikroskopischen“ Teilchenbewegung zur „ausgeglichenen“ oder „makroskopischen“ Strömung birgt nun Schwierigkeiten ähnlicher grundsätzlicher Art in sich, wie sie aus der kinetischen Gastheorie bekannt sind. Ein Versuch Hesselbergs und Björkdals¹⁾, die atmosphärische Windunruhe durch das Maxwell'sche Verteilungsgesetz zu beschreiben und darauf eine Theorie der ausgeglichenen Bewegung zu gründen²⁾, hat den Widerspruch H. Ertels³⁾ gefunden, der darauf hinweist, daß die Herleitung des Verteilungsgesetzes — als nach dem Vorbild der Gastheorie durchgeführt — denselben Einwänden ausgesetzt sei wie die entsprechenden in der Gastheorie, ein Einwand, der in gleicher Weise auch eine Arbeit A. Wagners⁴⁾ betrifft. H. Ertel⁵⁾ versucht darüber hinaus zu zeigen, daß die turbulenten Zusatzgeschwindigkeiten gar nicht nach dem Maxwell'schen Gesetz verteilt sein können, falls man das Bestehen der hydrodynamischen Gleichungen verlangt. Er leitet hydrodynamische Gleichungen für die ausgeglichene Bewegung ab, indem er von einem allgemeinen Verteilungsgesetz (Markoff, v. Laue)⁶⁾ ausgeht⁶⁾.

Nun ist in der kinetischen Gastheorie das Maxwell'sche Verteilungsgesetz nur im Gleichgewichtsfall, d. h. nur im ruhenden, gleichmäßig temperierten Gas verwirklicht — bei makroskopischer Bewegung aber ist die Maxwell'sche Verteilung gestört und die Maxwell'sche Funktion ist nur das erste Glied in einer Reihenentwicklung, die der Boltzmann'schen Integralgleichung genügt, wie D. Hilbert⁷⁾ und D. Enskog⁸⁾ gezeigt haben. Man wird also auch nicht erwarten dürfen, daß die Maxwell'sche Verteilung in bewegten Medien mehr zu liefern vermag als eben die Hydrostatik.

Was ich hier zeigen möchte, ist dies: will man bei vorgegebener, turbulenter Bewegung (in erster Linie ist dabei immer an ein Gas, etwa die atmosphärische Luft gedacht) zu den hydrodynamischen Gleichungen der ausgeglichenen Bewegung gelangen, so braucht man weder das Verteilungsgesetz zu kennen, noch irgendwelche Voraussetzungen zu machen, die zu ihm hinführen könnten. Es gelingt, wie sich zeigt, mit einer sehr kleinen Anzahl von plausiblen Postulaten die Turbulenztheorie aufzubauen und die Gleichungen für die makroskopische Bewegung herzuleiten. Da die Überlegungen fast ausschließlich phänomenologisch verlaufen, erspart man sich die so unangenehmen Hypothesen über Beschaffenheit und Wirken der einzelnen Turbulenzelemente (Wirbel, Luftpakete). Die Hauptrolle in den Überlegungen spielt dabei die allgemeine Transportgleichung. Weiter zeigt sich, daß man den Prandtl'schen Mischungswegansatz

durch einen etwas allgemeineren ersetzen muß, falls man für die ausgeglichene Bewegung Differentialgleichungen anstreben will, die von der Form der Navier-Stokesschen Gleichungen sind.

2. Ausgangspunkt und Definitionen.

An die Spitze stelle ich die

Forderung I. Das Turbulenzelement ist ein mechanisches System f -ten Freiheitsgrades.

Im allgemeinen wird man genötigt sein, an einen sehr hohen Freiheitsgrad des Luftwirbels zu denken, wenn man berücksichtigt, daß ein solcher aus sehr vielen Luftmolekülen besteht, die weitgehend voneinander unabhängig sind und die verschiedensten Bewegungen ausführen können.

Grundsätzlich ist aber die Anzahl f der Freiheitsgrade belanglos, wesentlich ist nur die Bindung eines derartigen Systems an die kanonischen Bewegungsgleichungen. Dem Bedenken, daß ein Turbulenzelement nichts Dauerndes sei, daß es zerfließe, kann entgegengehalten werden, daß dies zwar zutrefte, aber daß für zerfließende Wirbel auch wieder neue entstünden, so daß es im Mittel gleichgültig sei, ob man Entstehen und Vergehen durch einen eigenen Ansatz berücksichtige oder ob einfach die Persistenz des Wirbels vorausgesetzt wird.

Von den generellen Koordinaten des Systems, die wir mit $x^1, x^2, x^3, q^1, \dots, q^f$, bezeichnen wollen, reservieren wir die drei ersten, x^ν , für die (kartesischen) Lagekoordinaten des Schwerpunktes des Elements. Die zugehörigen generellen Impulse mögen p_ν ($\nu = 1, 2, \dots, f$) sein, weiter sei

$$(\delta x^1 \delta x^2 \delta x^3) \cdot (\delta q^1 \dots \delta q^f) \cdot (\delta p_1 \delta p_2 \dots \delta p_f) = \delta V \cdot \delta \tau \cdot \delta \pi = \delta \omega$$

das Element des Phasenraumes. Dann ist bekanntlich für die Bewegung

$$\frac{d(\delta \omega)}{dt} = 0 \dots \dots \dots (1)$$

(Jacobi, Liouville), d. h. das Phasenvolumen bleibt bei der Fortbewegung im Phasenraum konstant, unbeschadet der dabei auftretenden Deformationen des Volumelementes. Auch die Anzahl δn der „Zustandspunkte“, die sich in $\delta \omega$ befinden, bleibt konstant, die Bildpunkte ändern nur ihre gegenseitige Lage, während $\delta \omega$ sich weiterbewegt und deformiert. Bezeichnet man die Anzahl der in der Einheit des Phasenvolumens vorhandenen Zustandspunkte mit n^* , so ist mithin

$$\frac{dn^*}{dt} = 0 \dots \dots \dots (2).$$

Diese Anzahl $n^*(x, q, p, t)$ braucht nicht bekannt zu sein. Es genügt zu wissen, daß bei der hier betrachteten Bewegung der Turbulenzelemente (2) erfüllt ist und die Anzahl der im Raumelement δV an der Stelle x zur Zeit t vorhandenen Turbulenzelemente durch

$$\delta N = \delta V \cdot \int_{(\tau)} \delta \tau \int_{(\pi)} n^* \delta \pi \dots \dots \dots (3)$$

gegeben ist, wo die Integration über alle Werte der q, p zu erstrecken sind, deren das System fähig ist. Wir arbeiten also anstatt mit zeitlichen Mittelwerten mit solchen über alle möglichen Einzelzustände. Es definiert dann

$$\mathfrak{N}(x, t) = \frac{\delta N}{\delta V} = \int_{(\tau)} \delta \tau \int_{(\pi)} n^* \delta \pi \dots \dots \dots (4)$$

die in der Raumeinheit an der Raumzeitstelle x, t vorhandenen Anzahl von Turbulenzelementen. Ist $Q^*(x, q, p, t)$ eine am Einzelement haftende Eigenschaft (eine, dem Einzelement zugeordnete Funktion), so ist diese im Einheitsphasenvolumen im Ausmaß

$$Q^*(x, q, p, t) = Q^* n^* \dots \dots \dots (5)$$

vorhanden. Der Mittelwert \bar{Q} dieser Eigenschaft an der Stelle x^1, x^2, x^3 des Raumes zur Zeit t sei dann durch

$$\bar{Q}(x, t) = \frac{1}{\mathfrak{N}} \int_{(\tau)} \delta \tau \int_{(\pi)} Q^* \delta \pi = \frac{1}{\mathfrak{N}} \int_{(\tau)} \delta \tau \int_{(\pi)} Q^* n^* \delta \pi \dots \dots \dots (6)$$

definiert †).

†) Streng genommen müßte anstatt \bar{Q} geschrieben werden \bar{Q}' , da es sich um den Mittelwert über alle, den Einzelementen zukommenden Werte handelt.

Schreibt man beispielsweise dem Turbulenzelement die Masse m' zu, so ist in der Einheit des Phasenvolumens die Gesamtmasse $m^* = m' n^*$ vorhanden. Während der ganzen Bewegung ist

$$\frac{dm^*}{dt} = 0 \quad \dots \quad (7),$$

d. h. der Satz von der Erhaltung der Masse bleibt erfüllt. Die an der Stelle x zur Zeit t in der Raumeinheit vorhandene Masse ist im Mittel

$$\bar{m}(x, t) = \frac{1}{\mathfrak{N}} \int_{(\tau)} \delta \tau \int_{(\pi)} m^* \delta \pi = \frac{1}{\mathfrak{N}} \int_{(\tau)} \delta \tau \int_{(\pi)} m' n^* \delta \pi \quad \dots \quad (8),$$

d. h. es bedeutet

$$\int_{(\tau)} \delta \tau \int_{(\pi)} m^* \delta \pi = \bar{m} \mathfrak{N} = \bar{\varrho}(x, t) \quad \dots \quad (9)$$

die mittlere Dichte an der Stelle x zur Zeit t .

Dies vorausgeschickt, besteht wegen (1) die Identität

$$\frac{1}{\delta V} \frac{d}{dt} \int_{(\tau)} \delta \tau \int_{(\pi)} Q^* \delta \omega = \frac{d}{dt} \int_{(\tau)} \delta \tau \int_{(\pi)} Q^* \delta \pi = \int_{(\tau)} \delta \tau \int_{(\pi)} \frac{dQ^*}{dt} \delta \pi \quad \dots \quad (10),$$

die zur Transportgleichung ausgestaltet werden kann. Es bedeutet d/dt die vollständige Ableitung hinsichtlich aller Variabler x, q, p, t . Führt man nun im Integral rechter Hand die Differentiation tatsächlich durch und beachtet die kanonischen Relationen

$$\frac{\partial \dot{x}^\alpha}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial \dot{p}_\alpha}{\partial p_\alpha} = 0 \quad (\alpha = 1, 2, 3), \quad \frac{\partial \dot{q}^\beta}{\partial q^\beta} + \frac{\partial \dot{p}_\beta}{\partial p_\beta} = 0 \quad (\beta = 1, 2, \dots, f),$$

so kann (10) auf die folgende Form gebracht werden:

$$\boxed{\begin{aligned} \int_{(\tau)} \delta \tau \int_{(\pi)} \frac{dQ^*}{dt} \delta \pi &= \frac{\partial s}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial s^\alpha}{\partial x^\alpha} \\ \text{mit} \\ s &= \int_{(\tau)} \delta \tau \int_{(\pi)} Q^* \delta \pi, \quad s^\alpha = \int_{(\tau)} \delta \tau \int_{(\pi)} Q^* \dot{x}^\alpha \delta \pi \end{aligned}} \quad \dots \quad (11).$$

Vorausgesetzt ist dabei, daß

$$\left. \begin{aligned} \int_{(\tau)(\pi)} \frac{\partial Q^* \dot{q}^\beta}{\partial q^\beta} \delta \tau \delta \pi &= \int_{(\pi)} \delta \pi \int_{(q^\beta)} [Q^* \dot{q}^\beta]_{q_0^\beta}^{q_1^\beta} \delta q^4 \dots \delta q^{\beta-1} \delta q^{\beta+1} \dots \delta q^f = 0 \\ \int_{(\tau)(\pi)} \frac{\partial Q^* \dot{p}_\nu}{\partial p_\nu} \delta \tau \delta \pi &= \int_{(\pi)} \delta \pi \int_{(p_\nu)} [Q^* \dot{p}_\nu]_{p_0^\nu}^{p_1^\nu} \delta p_1 \dots \delta p_{\nu-1} \delta p_{\nu+1} \dots \delta p_f = 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (12)$$

eintritt. In leicht verständlicher Weise wird hier mit q_0^β, q_1^β bzw. p_0^ν, p_1^ν die jeweilige Unter- und Obergrenze der nach q^β bzw. p_ν ausgeführten Einzelintegration bezeichnet. Die restlichen Integrationsbereiche wurden bezüglich (q^β) und (p_ν) benannt. Beispielsweise kann (12) durch die Gleichungen

$$[Q^* \dot{q}^\beta]_{q_0^\beta}^{q_1^\beta} = 0, \quad [Q^* \dot{p}_\nu]_{p_0^\nu}^{p_1^\nu} = 0 \quad \dots \quad (13)$$

erreicht werden. Die in (11) auftretende vollständige Ableitung ist jetzt nur mehr hinsichtlich der Variablen x, t zu nehmen:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{\alpha} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \dot{x}^\alpha.$$

Die Transportgleichung (11), die hier in sinngemäßer Übertragung eines Gedankenganges von De Donder⁹⁾ hergeleitet wurde, soll zum Ausgangspunkt unserer weiteren Betrachtungen gemacht werden. In ihr kann man s als Eigenschaftsdichte, s^α als die Komponenten des Eigenschaftsstromes deuten:

$$s = \bar{Q} \cdot \mathfrak{N} \quad s^\alpha = \bar{Q} \dot{x}^\alpha \cdot \mathfrak{N} \quad \dots \quad (14).$$

Der Gedanke, eine Transportgleichung zum Ausgangspunkt für die Herleitung makroskopischer Eigenschaften eines Gases zu machen, geht auf Maxwell (1868) zurück. Das Cha-

rakteristische an der Form (11) der Transportgleichung besteht darin, daß sie von der speziellen Form des Verteilungsgesetzes keinen Gebrauch macht — es tritt auf dem Wege über (5) und n^* formal nur in der Definition der Mittelwerte auf. Außerdem geht die Art und Weise, wie die einzelnen Turbulenzelemente aufeinander wirken, in sie nicht ein, sie trägt phänomenologischen Charakter. Die Forderung nach Erfüllung von (12) oder (13) bedeutet für die zuzulassenden Funktionen Q keine scharfe Auslese. Es soll als nächste Forderung also verlangt werden:

Forderung II: Für die zu transportierende Funktion $Q^*(x, q, p, t)$, die dem einzelnen Turbulenzelement im Ausmaße $Q'(x, q, p, t)$ zugeordnet ist, soll die Transportgleichung (11) gelten.

3. Kontinuitätsgleichung und Impulssätze.

Sei nun $Q^* = m^*$, also gleich jener Masse, die im Einheitsphasenvolumen enthalten ist. Die wegen (7) immer erfüllte Gleichung

$$\int_{(\tau)} \delta \tau \int_{(\pi)} \frac{dm^*}{dt} \delta \pi = 0$$

besagt die Erhaltung der Gesamtmasse während der Bewegung der Turbulenzelemente. Die Gleichung (11) hingegen sagt aus, in welcher Weise sich diese Erhaltung vollzieht: die zeitliche Änderung der im Volumen eins enthaltenen Masse, nämlich

$$\int_{(\tau)} \delta \tau \int_{(\pi)} m^* \delta \pi = \int_{(\tau)} \delta \tau \int_{(\pi)} m' n^* \delta \pi = \overline{m'} \mathfrak{N} = \bar{\rho}(x, t)$$

wird kompensiert durch die (negative) Divergenz des Vektors \mathfrak{s} des Massenflusses mit den Komponenten

$$s^\alpha = \int_{(\tau)} \delta \tau \int_{(\pi)} m' \dot{x}^\alpha \cdot n^* \delta \pi = \overline{m' \dot{x}^\alpha} \cdot \mathfrak{N},$$

so daß

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \text{div } \mathfrak{s} = 0 \quad \dots \dots \dots (14)$$

erfüllt ist. Erst unter der Voraussetzung, daß die Masse m' des Turbulenzelements nur von den x und von t abhängt, kann m' vor das Integral — und also auch vor das Mittelwertszeichen — genommen werden, so daß $\overline{m' \dot{x}^\alpha} \cdot \mathfrak{N} = m' \mathfrak{N} \cdot \bar{\dot{x}^\alpha} = \bar{\rho} \cdot \bar{\dot{x}^\alpha}$ ausfällt. Wegen der Bedeutung

$$\bar{\dot{x}^\alpha} = v^\alpha \quad (\alpha = 1, 2, 3) = \alpha\text{-Komponente der ausgeglichenen Geschwindigkeit } \mathbf{v} \quad (15),$$

nimmt in diesem Falle die Gleichung (14) die Form der Kontinuitätsgleichung an:

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \text{div } \bar{\rho} \mathbf{v} = 0 \quad \dots \dots \dots (16).$$

Hinsichtlich der Ableitung der Impulsgleichungen aus der Transportgleichung gilt Folgendes: rein formal ist eine additive Zerlegung des Geschwindigkeitsvektors $\dot{\mathbf{x}}$ mit den Komponenten \dot{x}^α in zwei Summanden \mathbf{v} und \mathbf{u} immer möglich:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v} + \mathbf{u} \quad \dots \dots \dots (17).$$

Eine derartige Zerlegung braucht nur nicht immer eine physikalische Bedeutung zu besitzen. Eine physikalisch sinnvolle Zerlegung erhält man aber, wenn man mit Reynolds den Vektor \mathbf{v} mit der Geschwindigkeit der ausgeglichenen Bewegung identifiziert. Der Vektor \mathbf{u} hat dann die Bedeutung einer „Zusatzgeschwindigkeit“ oder „Relativgeschwindigkeit“. Die Mittelwertbildung über (17) zeigt, daß $\overline{u^\alpha} = 0$ sein muß.

Forderung III: Die Reynoldssche additive Zerlegung der Schwerpunktsgeschwindigkeit in eine mittlere und eine Zusatzgeschwindigkeit soll auch in der Turbulenztheorie gelten.

Wir machen Gebrauch davon, indem wir das Q^* in der Transportgleichung nun nacheinander mit den Komponenten des Vektors „relativer Impuls“ identifizieren:

$$Q^{i*} = m^* u^i = m^* (\dot{x}^i - v^i) \quad (i = 1, 2, 3) \quad \dots \dots \dots (18).$$

Die in (11) definierte skalare Größe s bekommt einen Index i und wird zu einem Vektor, die Größen s^α (Komponenten eines Vektors) werden durch das Hinzutreten eines neuen Index zu $s^{i\alpha}$ — den Komponenten eines Tensors, wie aus der Definition in (11) hervorgeht. Im einzelnen ist

$$s^i = \int_{(\tau)} \delta \tau \int_{(\pi)} m^* u^i \delta \pi = \int_{(\tau)} \delta \tau \int_{(\pi)} m' u^i \cdot n^* \delta \pi = \overline{m' u^i} \cdot \mathfrak{N} = \bar{\rho} \bar{u}^i = 0 \quad \dots \dots \dots (19),$$

wenn wieder $m' = m'(x, t)$ vorausgesetzt wird, und ferner

$$s^{i\alpha} = \int_{(\tau)} \delta \tau \int_{(\pi)} m^* u^i \dot{x}^\alpha \delta \pi = \int_{(\tau)} \delta \tau \int_{(\pi)} m' u^i \dot{x}_\alpha \cdot n^* \delta \pi = \overline{m' u^i \dot{x}^\alpha} \cdot \mathfrak{N} = \bar{\varrho} \overline{u^i \dot{x}^\alpha} = \bar{\varrho} \overline{u^i u^\alpha} = T^{i\alpha} \quad (20).$$

Anstatt $s^{i\alpha}$ soll weiterhin $T^{i\alpha}$ geschrieben werden. Die $T^{i\alpha}$ bedeuten physikalisch die Komponenten einer Tensordichte, der Dichte des Impulsstromes \mathfrak{T} (im euklidischen Raum fällt der Unterschied zwischen einem echten Tensor und einer Tensordichte weg). Das in der Transportgleichung auftretende Integral wird wegen (2) zu

$$\int_{(\tau)} \delta \tau \int_{(\pi)} \frac{d}{dt} [m' (\dot{x}^i - v^i) \cdot n^*] \delta \pi = \frac{\bar{\varrho}}{m'} \left(\frac{d m' \dot{x}^i}{dt} \right) - \frac{\bar{\varrho}}{m'} \left(\frac{d m' v^i}{dt} \right).$$

Hier bedeutet nun $\frac{d m' \dot{x}^i}{dt}$ die i -te Komponente der auf den Schwerpunkt des Turbulenzelements der Masse m' wirkenden eingprägten Kraft (Massenkraft) und $\left(\frac{d m' v^i}{dt} \right)$ ihren Mittelwert an der Stelle x zur Zeit t . Mithin stellt

$$\frac{1}{m'} \left(\frac{d m' \dot{x}^i}{dt} \right) = K_i(x, t) \quad (21)$$

die i -te Komponente der auf die Masseneinheit reduzierten, ausgeglichenen Massenkraft dar. Weiter ist, da die v^i Funktionen der x, t allein sind (was voraussetzungsgemäß auch für m' gelten soll)

$$\frac{1}{m'} \left(\frac{d m' v^i}{dt} \right) = \frac{1}{m'} \frac{d m' v^i}{dt} = B_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad (22)$$

die i -te Komponente der auf die Masseneinheit bezogenen Änderung der Bewegungsgröße (des Impulses) der ausgeglichenen Bewegung. Die „Impulsgleichungen“ lauten mithin

$$B_i = K_i - \frac{1}{\bar{\varrho}} \operatorname{div}_i \mathfrak{T}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (23).$$

Sie gehen für den Fall, daß man $m' = \text{const.}$ voraussetzt, im Hinblick auf (22) in die wohl-bekannten Eulerschen Gleichungen

$$\frac{d v^i}{dt} + (v, \operatorname{Grad}) v^i = K_i(x, t) - \frac{1}{\bar{\varrho}} \operatorname{div}_i \mathfrak{T}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (24)$$

über. Der Druck p bzw. sein Gradient tritt hier noch nicht auf, er tritt erst dann in Erscheinung, wenn man über den Tensor \mathfrak{T} weitere Festsetzungen trifft. Diese können nicht willkürlich sein, sondern müssen sich auf Überlegungen stützen, die einigermaßen plausibel sind. Aus der Definition (20) geht hervor, daß diese nur die Komponenten der Zusatzgeschwindigkeit u^α betreffen können.

4. Turbulenztensor und hydrodynamische Gleichungen.

Hier könnte nun der Prandtl'sche Mischungswegansatz ^{10), 11)} eingeführt werden, den wir gleich in der allgemeinsten Form ¹²⁾

$$u^i = - \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial v^i}{\partial x^\alpha} L_\alpha, \quad i = 1, 2, 3 \quad (25)$$

schreiben wollen, wo nun die L_α die Komponenten des „Mischungsweges“ bedeuten. Damit würde erreicht, daß der durch (20) definierte Turbulenztensor nunmehr in der Form

$$T^{i\alpha} = - \sum_v \eta_{vk} \frac{\partial v^i}{\partial x^k} \quad (26)$$

mit

$$\eta_{vk} = \bar{\varrho} \overline{L_v u^k} \quad (27)$$

erscheint. Zugleich würde durch (27) der „Austauschtensor“ η_{vk} für den Impulstransport eingeführt: die Analogie mit der Gastheorie würde auf diese Weise gewahrt, was zweifellos eine Stütze für den Mischungswegansatz (25) bedeutet. Der Nachteil besteht darin, daß der Turbulenztensor \mathfrak{T} nicht jene Form bekommt, die wir aus der Hydrodynamik der viskösen Flüssigkeiten gewöhnt sind. Es soll doch, wenn möglich, gezeigt werden, daß visköse Flüssigkeiten einerseits und in turbulenter Bewegung befindliche Flüssigkeiten andererseits sich physikalisch ähnlich verhalten auch dann, wenn letztere als frei von innerer Reibung vorausgesetzt werden. Es sollen, mit anderen Worten, die Differentialgleichungen beider

Arten von Bewegung gleich lauten, verschieden sollen nur die in ihnen auftretenden Koeffizienten (Konstanten) sein. Diese Ähnlichkeit im Strömungsablauf visköser und turbulenter Flüssigkeiten kann durch den Ansatz (25) nicht herbeigeführt werden.

Offenbar war bei seiner Aufstellung der Gedanke maßgebend, daß die Zusatzgeschwindigkeiten u^i keine selbständigen Größen seien, daß sie vielmehr abhängen vom makroskopischen Bewegungszustand des Mediums. Dies ist eine sicherlich gerechtfertigte Annahme, ebenso wie die andere, daß es nicht die v^α selbst, sondern deren räumliche Ableitungen sind, von denen die Zusatzgeschwindigkeiten abhängen. Es entsteht aber die Frage, warum man nicht, wenn man schon eine Abhängigkeit der u^i vom ausgeglichenen Bewegungszustand annimmt, — qualitativ steht eine solche nach den o. a. experimentellen Ergebnissen fest — eine Abhängigkeit vom Deformationstensor postuliert, genauer: vom Tensor e_{ik} der Deformationsgeschwindigkeiten

$$e_{ik} = \frac{\partial v^i}{\partial x^k} + \frac{\partial v^k}{\partial x^i} + \sum_v \frac{\partial v^v}{\partial x^i} \frac{\partial v^v}{\partial x^k} \quad (i, k = 1, 2, 3) \dots \dots \dots (28).$$

Dieser besitzt neben seiner Invarianzeigenschaft als Tensor noch den Vorzug, physikalisch etwas sehr Wichtiges zu bedeuten, so daß es eine plausible Annahme ist, wenn man

$$u^i = u^i(x, q, p, t, e_{11} \dots e_{33}) \dots \dots \dots (29)$$

setzt. Wenn sich die Deformationsgeschwindigkeiten (nicht die Deformationen selbst, wie in der Elastizitätstheorie) in so kleinen Grenzen halten, daß Glieder zweiter und höherer Ordnung gegenüber Gliedern erster Ordnung vernachlässigt werden dürfen, kann man sich in der Reihenentwicklung mit

$$u^i = u_0^i + \sum_{\alpha\beta} a^{i,\alpha\beta} e_{\alpha\beta} \dots \dots \dots (30)$$

begnügen, wo nun die u_0^i und $a^{i,\alpha\beta}$ -Funktionen der x, q, p, t sein können. Im allgemeinen werden die u_0^i nicht verschwinden. Sie bedeuten die Komponenten der Relativgeschwindigkeit für den Fall der „Ruhturbulenz“. Die Existenz einer solchen muß man zulassen — genau so wie man eine Molekularbewegung auch in einem ruhenden Gas zulassen muß. Man kann sich den Fall etwa dadurch verwirklicht denken, daß man annimmt, in einem Wasserbehälter Sorge eine hinreichend große Anzahl winziger Fische für eine ständige turbulente Bewegung und Durchmischung — dies kann geschehen, ohne daß das Wasser „im großen“ eine bestimmte Strömung aufwiese.

Forderung IV: Die Reynoldsschen Zusatzgeschwindigkeiten hängen von der ausgeglichenen Bewegung gemäß (30) ab.

Wegen $\bar{u}^i = 0$ muß auch $\bar{u}_0^i = 0$ und $\bar{a}^{i,\alpha\beta} = 0$ eintreten. Der Ansatz (30) wird nun in die Definition (20) für die T^{ik} eingetragen und liefert

$$T^{ik} = \bar{\rho} \bar{u}^i \bar{u}^k = P_0^{ik} + \sum_{\alpha\beta} B^{ik,\alpha\beta} e_{\alpha\beta} + \sum_{\alpha\beta,rs} \bar{\rho} \bar{a}^{i,\alpha\beta} \bar{a}^{k,rs} e_{\alpha\beta} e_{rs} \dots \dots \dots (31)$$

mit

$$P_0^{ik} = \bar{\rho} \bar{u}_0^i \bar{u}_0^k, \quad B^{ik,\alpha\beta} = \bar{\rho} (\bar{u}_0^i \bar{a}^{k,\alpha\beta} + \bar{u}_0^k \bar{a}^{i,\alpha\beta}) \dots \dots \dots (32).$$

Die Glieder zweiten und höheren Grades sollen neben denen ersten Grades vernachlässigt werden dürfen. Die Impulsgleichungen bekommen ihre endgültige Form, wenn man die so gefundenen Ausdrücke für T^{ik} in (24) einsetzt. Mit dieser Substitution ist die Aufgabe gelöst, die Differentialgleichungen der ausgeglichenen Bewegung zu finden.

Sie bilden ein viergliedriges System, das besteht aus der Kontinuitätsgleichung (16) und den drei, entsprechend (31) umgeformten Impulsgleichungen (24). Die unbekannten Funktionen $v^\alpha, \bar{\rho}$ sind — bei vorgegebenen Anfangswerten und zu erfüllenden Randbedingungen — zu suchen.

Die Forderung, das Medium sei isotrop und homogen, schränkt die Möglichkeiten für die Größen $B^{ik,\alpha\beta}$ in (31) wesentlich ein. Wegen der Isotropie können nicht alle untereinander unabhängig und wegen der Homogenität müssen sie Konstanten sein. Die weiteren Überlegungen erfolgen in bekannter Weise. Die Existenz eines Potentials vorausgesetzt (Turbulenzpotential) — bei isothermen und adiabatischen Vorgängen ist diese Existenz sichergestellt — lassen sich die Tensorkomponenten gemäß

$$T^{ik} = - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial e_{ik}} + \frac{\partial \Phi}{\partial e_{ki}} \right) \dots \dots \dots (33)$$

aus der Potentialfunktion Φ ableiten. Da diese selbst — wir setzen sie in der Form

$$\Phi = \Phi_0 + \sum_{\alpha\beta} \Omega^{\alpha\beta} e_{\alpha\beta} + \sum_{\alpha\beta,rs} \Lambda^{\alpha\beta,rs} e_{\alpha\beta} e_{rs} + \dots$$

an — von der räumlichen Lage des Koordinatensystems nicht abhängen darf, müssen die Glieder

einzelnen Drehinvarianten darstellen. Wir wählen den deformationsfreien Zustand als jenen mit dem Potentialwert Null, um $\Phi_0 \equiv 0$ setzen zu dürfen. In der üblichen Weise zeigt man nun, daß die Glieder ersten Grades in den $e_{\alpha\beta}$ im wesentlichen mit der Drehinvariante ersten Grades

$$\sum_{\alpha} e_{\alpha}^{\alpha} = \sum_{\alpha} e_{\alpha\alpha} = \Theta$$

übereinstimmen müssen, woraus

$$\sum_{\alpha\beta} \Omega_{\alpha\beta} e_{\alpha\beta} = -\frac{p}{2} \Theta, \quad \Omega_{\alpha\beta} = \begin{cases} 0 & \text{für } \beta \neq \alpha \\ -\frac{p}{2} & \text{für } \beta = \alpha \end{cases}$$

folgt, und daß die Glieder zweiten Grades eine Linearkombination der Drehinvarianten zweiten Grades sein müssen; also ist

$$\sum_{\alpha\beta,rs} \Lambda^{\alpha\beta,rs} e_{\alpha\beta} e_{rs} = \frac{A}{4} \Theta^2 + \frac{M}{2} I_2 \text{ mit } A, M = \text{const.}$$

und

$$I_2 = \sum_{\alpha\beta} e_{\alpha}^{\beta} e_{\alpha}^{\beta} = \sum_{\alpha\beta} e_{\alpha\beta} e_{\alpha\beta}.$$

Für den contravarianten Tensor vierter Stufe $\Lambda^{\alpha\beta,rs}$ führt dies auf die Bedingungen

$$\Lambda^{ii,kk} = \frac{A}{4}, \quad \Lambda^{ik,ik} = \frac{M}{4}, \quad \Lambda^{ii,ii} = \frac{A+2M}{8} \quad \begin{matrix} i, k = 1, 2, 3 \\ i \neq k \end{matrix} \quad (34)$$

alle übrigen $\Lambda^{\alpha\beta,rs}$ gleich Null, so daß die Potentialfunktion zu

$$\Phi = -\frac{p}{2} \Theta + \frac{A}{8} \Theta^2 + \frac{M}{4} I_2 + \dots \quad (35)$$

wird. Aus (33) ist dann

$$P^{ik} = \delta_i^k \left(p - \frac{A}{2} \Theta \right) - M e_{ik} \quad (36)$$

zu entnehmen, und diese Ausdrücke ergeben, in die Impulsgleichungen eingesetzt, sofort

$$\frac{\partial v^i}{\partial t} + (v, \text{grad}) v^i = K_i(x, t) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x^i} - \frac{1}{\rho} \text{div}_i p \quad i = 1, 2, 3$$

$$p^{ik} = -\delta_i^k \frac{A}{2} \Theta - M e_{ik} \quad (37)$$

Man erhält die Gleichungen in der gebräuchlichen, Navier-Stokesschen Form, wenn man an Stelle der vollständigen Komponenten (28) der Deformationsgeschwindigkeiten die verkürzten Komponenten

$$\tilde{e}_{ik} = \frac{\partial v^i}{\partial x^k} + \frac{\partial v^k}{\partial x^i}, \quad \tilde{e}_{ii} = 2 \frac{\partial v^i}{\partial x^i}$$

benutzt. Die ausgeglichene Bewegung einer turbulent strömenden Flüssigkeit oder eines Gases verläuft mithin nach derselben Gesetzmäßigkeit wie die laminare Bewegung einer viskösen Flüssigkeit, nur mit anderer Größenordnung in den Koeffizienten.

Literatur.

- [1] Th. Hesselberg u. E. Björkdal: Über das Verteilungsgesetz der Windruhe. Beitr. z. Phys. d. freien Atmosphäre, Bd. XV, S. 121 (1929).
- [2] Th. Hesselberg: Die Gesetze der ausgeglichenen, atmosphärischen Bewegungen. Beitr. z. Phys. d. f. Atmosph. Bd. XII, S. 141, 1926.
- [3] H. Ertel: Die Richtungsschwankung der horizontalen Windkomponente. Gerlands Beitr. Geophys. Bd. 23, S. 15, 1929.
- [4] A. Wagner: Theorie der Böigkeit und der Häufigkeitsverteilung von Windstärke und Windrichtung! Gerlands Beitr. Geophys. Bd. 24, S. 386, 1929.
- [5] H. Ertel: Zur Theorie der atmosphärischen Turbulenz. Z. ang. Math. Mech. Bd. 11, S. 20, 1931.
- [6] H. Ertel: Die hydrodynamischen Grundgleichungen turbulenter Luftströmungen. Meteorol. Ztschr. 1943 S. 289.
- [7] D. Hilbert: Die Integralgleichungen. Leipzig 1912.
- [8] D. Enskog: Inauguraldissertation. Upsala 1917.
- [9] De Donder: Sur la formule fondamentale de la théorie cinétique. Acad. Roy. de Belg. Cl. de Science, 5e série, tome 10, pp. 11–17, 1924.
- [10] L. Prandtl: Bericht über die Untersuchungen zur ausgebildeten Turbulenz. Z. angew. Math. Mech. Bd. 5, S. 136–139, 1925.
- [11] L. Prandtl: Führer durch die Strömungslehre. Braunschweig 1942, S. 102 ff.
- [12] H. Ertel: Allgemeine Theorie der Turbulenzreibung und des „Austausches“. Sitzungsber. d. Preuß. Akademie der Wissensch. Phys.-Mathem. Klasse, Jahrg. 1932, S. 436.

Zur Ausbreitung der Stoßwellen in Kreislochscheiben.

Von Alexander Kromm in Berlin.

Ergänzende Mitteilung*).

In der ersten Mitteilung ist im Anschluß an die Darstellung der Lösungsmethode ein Sonderfall behandelt worden, daß die Stoßwellen durch einen am Lochrand plötzlich angreifenden radial nach außen gerichteten und zeitlich konstanten Druck hervorgerufen werden. In dieser Mitteilung sind durch Versehen die Figuren fortgeblieben, was hier nachgeholt werden soll. Außerdem wird hier ein weiterer, in der Zusammenfassung zur ersten Mitteilung kurz erwähnter Sonderfall untersucht, wenn den Randpunkten von $t = 0$ ab eine konstante radiale Geschwindigkeit aufgezwungen wird.

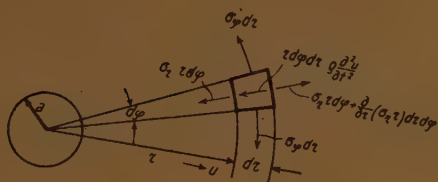


Bild 1. Scheibenkreisloch und Kräfte am Scheibenelement.

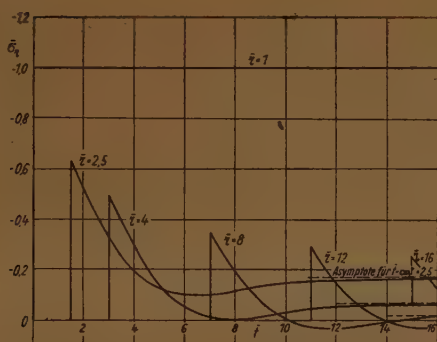


Bild 2. Zeitlicher Ablauf der Radialspannung

$\bar{\sigma}_r = \frac{\sigma_r}{q}$ bei plötzlich aufgebrachtem Druck q am Lochrand $\bar{r} = r/a = 1$ ($\bar{t} = ct/a$).

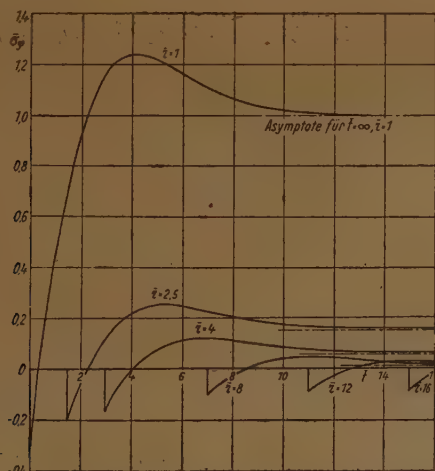


Bild 3. Zeitlicher Ablauf der Umfangsspannung $\bar{\sigma}_\varphi = \sigma_\varphi/q$ bei plötzlich aufgebrachtem Druck q am Lochrand $\bar{r} = r/a = 1$ ($\bar{t} = ct/a$).

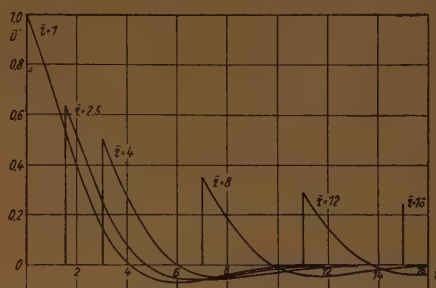


Bild 4. Zeitlicher Ablauf der Teilchengeschwindigkeit $\bar{u} = \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\sqrt{E'q}}{q}$ bei plötzlich aufgebrachtem Druck q am Lochrand $\bar{r} = r/a = 1$ ($\bar{t} = ct/a$).

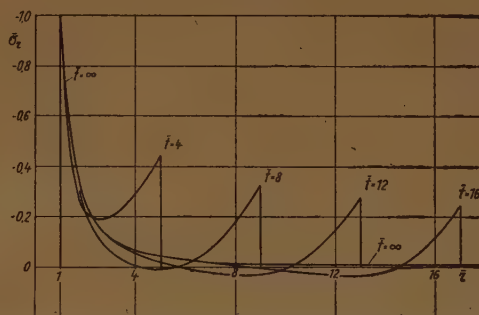


Bild 5. Ausbreitung der Radialspannung $\bar{\sigma}_r = \sigma_r/q$ bei plötzlich aufgebrachtem Druck q am Lochrand $\bar{r} = r/a = 1$ ($\bar{t} = ct/a$).

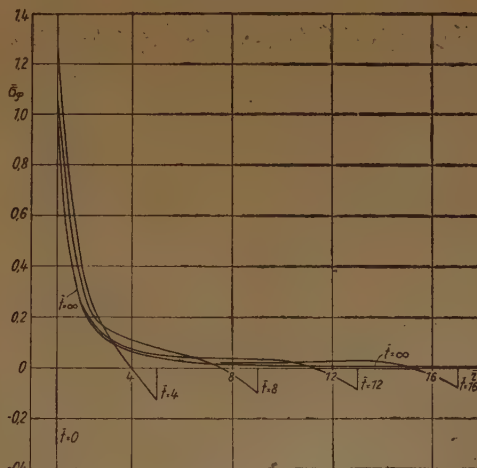


Bild 6. Ausbreitung der Umfangsspannung $\bar{\sigma}_\varphi = \sigma_\varphi/q$ bei plötzlich aufgebrachtem Druck q am Lochrand $\bar{r} = r/a = 1$ ($\bar{t} = ct/a$).

* Die erste Mitteilung dieser Arbeit ist erschienen in Z. angew. Math. Mech. Bd. 28 (1948), S. 104.

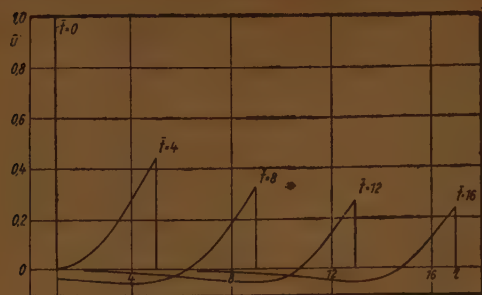


Bild 7. Ausbreitung der Teilehengeschwindigkeit

$\bar{u} = \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\sqrt{E'} c}{q}$ bei plötzlich aufgebrachtem Druck q am Lochrand $\bar{r} = r/a = 1$ ($\bar{t} = ct/a$).

Lösung der Aufgabe, wenn die Radialgeschwindigkeit am Lochrand gegeben ist.

Wir wenden uns nun dem zweiten, durch die Gl. (7.2) *) beschriebenen Belastungsfall zu und nehmen an, daß dem Lochrande $r = a$ von $t = 0$ an eine konstante Geschwindigkeit v_0 aufgezwungen wird. Bei der Behandlung dieses Falles können wir uns kurz fassen, da der Rechnungsgang derselbe ist wie im Abschnitt III.

Durch die Laplace-Transformation der Randbedingung (7.2) erhalten wir die Randbedingung für die Unterfunktion:

$$p U(a, p) = \frac{v_0}{p} \quad \dots \quad (57).$$

Mit (57) ergibt sich die Lösung des Randwertproblems im Unterbereich aus (15) zu:

$$U(r, p) = \frac{\frac{v_0}{p^2} K_1\left(\frac{pr}{c}\right)}{K_1\left(\frac{pa}{c}\right)} \quad \dots \quad (58).$$

Wir führen wieder dimensionslose Größen ein und bezeichnen sie wie in (20) mit überstrichenen Buchstaben. Dabei ist zu beachten, daß sie jetzt zum Teil eine andere Bedeutung haben wie früher:

$$\left. \begin{aligned} \bar{r} &= \frac{r}{a}, \quad \bar{t} = \frac{ct}{a}, \quad \bar{p} = \frac{pa}{c}, \quad \bar{u} = \frac{u}{a} \frac{c}{v_0}, \quad \bar{U} = U \frac{c}{v_0} \frac{c}{a^2} \\ \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{r}} &= \bar{u}' = \frac{\partial u}{\partial r} \frac{c}{v_0}, \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} = \bar{u}'' = \frac{\partial u}{\partial t} \frac{1}{v_0}, \quad \bar{\sigma}_r = \frac{\sigma_r}{E'} \frac{c}{v_0}, \quad \bar{\sigma}_\varphi = \frac{\sigma_\varphi}{E'} \frac{c}{v_0} \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (59).$$

Das Hookesche Gesetz erhält damit dieselbe Form wie im ersten Fall (s. Gl. (21)):

$$\bar{\sigma}_r = \bar{u}' + \nu \frac{\bar{u}}{\bar{r}}, \quad \bar{\sigma}_\varphi = \nu \bar{u}' + \frac{\bar{u}}{\bar{r}} \quad \dots \quad (60).$$

Für die Laplace-Transformierte $\bar{U}(\bar{r}, \bar{p}) = \int_0^\infty e^{-\bar{p}\bar{t}} \bar{u} d\bar{t} \rightarrow \bar{u}(\bar{r}, \bar{t})$ erhält man aus (58) und (59) den Ausdruck

$$\bar{U}(\bar{r}, \bar{p}) = \frac{\frac{1}{\bar{p}^2} K_1(\bar{r} \bar{p})}{K_1(\bar{p})} \quad \dots \quad (61),$$

der sich von dem früheren in Gl. (22) nur durch den Nenner unterscheidet. Auch hier läßt sich für den mit $e^{\bar{p}}$ erweiterten Nenner die Oberfunktion angeben, so daß wir für die Übersetzung von U in den Oberbereich wieder die im Abschnitt III entwickelte Methode anwenden können.

Aus der Schläflischen Integraldarstellung von $\frac{1}{\bar{p}} K_1(\bar{r} \bar{p})$ nach Gleichung (24) erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{1}{\bar{p}} K_1(\bar{r} \bar{p}) &= -\frac{1}{\bar{p}} \int_{\bar{r}}^\infty \frac{\sqrt{x^2 - \bar{r}^2}}{\bar{r}} d(e^{-\bar{p}x}) = \\ &= -\frac{1}{\bar{p}} \left[e^{-\bar{p}x} \frac{\sqrt{x^2 - \bar{r}^2}}{\bar{r}} \right]_{\bar{r}}^\infty + \frac{1}{\bar{p}} \int_{\bar{r}}^\infty \frac{x}{\bar{r} \sqrt{x^2 - \bar{r}^2}} dx, \end{aligned}$$

d. h. wegen $\operatorname{Re} \bar{p} > 0$

$$K_1(\bar{r} \bar{p}) = \int_{\bar{r}}^\infty e^{-\bar{p}x} \frac{x}{\bar{r} \sqrt{x^2 - \bar{r}^2}} dx \quad \dots \quad (62).$$

Mit $x = \bar{t} + 1$ und $\bar{r} = 1$ läßt sich $K_1(\bar{p})$ durch ein Laplace-Integral darstellen:

$$K_1(\bar{p}) = e^{-\bar{p}} \int_0^{\infty} e^{-\bar{p}\bar{t}} k(\bar{t}) d\bar{t} \quad (63),$$

wo jetzt zum Unterschied von (26)

$$k(\bar{t}) = \frac{\bar{t} + 1}{\sqrt{(\bar{t} + 1)^2 - 1}} \quad (64)$$

ist. Aus (63) ergibt sich die Oberfunktion von $e^{\bar{p}} K_1(\bar{p})$:

$$e^{\bar{p}} K_1(\bar{p}) \rightarrow k(\bar{t}) \quad (65).$$

Die Oberfunktion des $e^{\bar{p}}$ -fachen Zählers von (61) haben wir schon im Abschnitt II ermittelt (vgl. die Gleichungen (22), (29) und (31)). Durch die Umformung der Gleichung (61)

$$\bar{U}(\bar{r}, \bar{p}) \cdot e^{\bar{p}} K_1(\bar{p}) = e^{\bar{p}} \frac{1}{\bar{p}^2} K_1(\bar{r} \bar{p}) \quad (66)$$

und durch Anwendung des Faltungssatzes auf die linke Seite dieser Gleichung erhalten wir im Oberbereich wieder eine Volterrasche Integralgleichung erster Art für \bar{u} :

$$\int_0^{\bar{t}} \bar{u}(\bar{r}, \bar{\tau}) k(\bar{t} - \bar{\tau}) d\bar{\tau} = z(\bar{r}, \bar{t}) \quad (67)$$

mit derselben freien Funktion $z(\bar{r}, \bar{t})$ nach Gleichung (29) wie im ersten Fall, aber mit einem anderen Kern¹⁰⁾

$$k(\bar{t} - \bar{\tau}) = \frac{\bar{t} - \bar{\tau} + 1}{\sqrt{(\bar{t} - \bar{\tau} + 1)^2 - 1}} \quad (68).$$

Wegen $z(\bar{r}, \bar{t}) = 0$ für $0 > \bar{t} \leq \bar{r} - 1$ ist wieder

$$\bar{u}(\bar{r}, \bar{t}) = 0 \quad \text{für } 0 \leq \bar{t} \leq \bar{r} - 1 \quad (69),$$

d. h. die Schwingungen haben wieder eine Wellenfront, die sich mit der Geschwindigkeit c nach Gleichung (5) ausbreitet. Mit (69) ergibt sich aus (67)

$$\int_{\bar{r}-1}^{\bar{t}} \bar{u}(\bar{r}, \bar{\tau}) k(\bar{t} - \bar{\tau}) d\bar{\tau} = \frac{\bar{t} + 1}{2\bar{r}} \sqrt{(\bar{t} + 1)^2 - \bar{r}^2} - \frac{\bar{r}}{2} \ln \frac{\bar{t} + 1 + \sqrt{(\bar{t} + 1)^2 - \bar{r}^2}}{\bar{r}} = f_1(\bar{r}, \bar{t}) \quad (70).$$

Für $\bar{t} = \bar{r} - 1 + \varepsilon$ erhält man daraus im Grenzfall $\varepsilon \rightarrow 0$ wie im ersten Fall (vgl. Gl. (37)):

$$\bar{u}(\bar{r}, \bar{t} = \bar{r} - 1 + 0) = 0 \quad (71),$$

was auch wegen der Stetigkeit der Verschiebung erforderlich ist. Ebenso wie unter III, 2 kann man aus (70) Integralgleichungen für \bar{u}' und \bar{u}'' ermitteln, die denselben Bau und dieselben rechten Seiten haben wie (38) und (41), aber den Kern (68). An der Wellenfront ergibt sich aus ihnen

$$\bar{u}'(\bar{r}, \bar{t} = \bar{r} - 1 + 0) = u' \frac{c}{v_0} = -\frac{1}{\sqrt{\bar{r}}} \quad (72),$$

$$\bar{u}''(\bar{r}, \bar{t} = \bar{r} - 1 + 0) = u'' \frac{1}{v_0} = \frac{1}{\sqrt{\bar{r}}} \quad (73).$$

¹⁰⁾ Für die Anwendung des Faltungssatzes muß noch nachgewiesen werden, daß die Laplace-Transformationen aller beteiligten Funktionen absolut konvergieren. Diese Forderung ist für $k(\bar{t})$ (s. Gl. (64)) erfüllt, da $k(\bar{t})$ bei $\bar{t} = 0$ eine integrierbare Singularität besitzt und bei großen \bar{t} dem Wert 1 zustrebt, d. h. beschränkt bleibt. Um die absolute Konvergenz des Laplace-Integrals von $\bar{u}(\bar{r}, \bar{t})$ nachzuweisen, müssen wir das physikalische Verhalten der Scheibe in Betracht ziehen. Für die vorliegende Randbedingung (7.2) wird die Verschiebung \bar{u} größenordnungsmäßig etwa proportional mit der Zeit anwachsen. Aber für $\bar{u} = b\bar{t}$ ist das Laplace-Integral wegen $\Re p > 0$ in der Tat absolut konvergent:

$$\int_0^{\infty} |e^{-\bar{p}\bar{t}} b\bar{t}| d\bar{t} \leq b \int_0^{\infty} e^{-\bar{t} \Re p} \bar{t} d\bar{t} = -\frac{b}{\Re p} e^{-\bar{t} \Re p} \left(\bar{t} + \frac{1}{\Re p} \right) \Big|_0^{\infty} = \frac{b}{(\Re p)^2}.$$

Durch Einsetzen der Gleichungen (71) und (72) in das Elastizitätsgesetz für $\bar{\sigma}_r$ und $\bar{\sigma}_\varphi$ (s. Gl. 60)) folgt weiter für den Sprung der Spannungen an der Wellenfront:

$$\bar{\sigma}_r(\bar{r}, \bar{t} = \bar{r} - 1 + 0) = \frac{\sigma_r c}{E' v_0} = -\frac{1}{\sqrt{\bar{r}}} = -\sqrt{\frac{a}{r}} \quad \dots \quad (74.1)$$

$$\bar{\sigma}_\varphi(\bar{r}, \bar{t} = \bar{r} - 1 + 0) = \frac{\sigma_\varphi c}{E' v_0} = -\nu \frac{1}{\sqrt{\bar{r}}} = -\nu \sqrt{\frac{a}{r}} \quad \dots \quad (74.2).$$

Die Gesetzmäßigkeiten (72), (73) und (74), nach denen sich diese Sprunggrößen mit dem Abstand \bar{r} ändern, sind dieselben wie im ersten Fall (s. Gleichungen (42) und (43)). Auch das Verhältnis der Teilchengeschwindigkeit zur Radialspannung (s. Gleichungen (73), (74) und (75)):

$$\frac{u'}{\sigma_r} = -\frac{1}{\sqrt{\rho E'}}$$

hängt wieder nur von der Größe des Wellenwiderstandes $W = \sqrt{\rho E'}$ ab (s. Gl. (44)).

Um die Zustandsgrößen $\bar{\sigma}_r$, $\bar{\sigma}_\varphi$ und \bar{u} in der Nähe der Wellenfront aus den Taylorschen Reihen (45) und (46) berechnen zu können, müssen wir für diese Zustandsgrößen noch die partiellen Ableitungen nach \bar{r} und \bar{t} an der Wellenfront angeben. Wir stellen hier nur die Ergebnisse zusammen:

$$\left. \begin{aligned} \bar{u}' \cdot (\bar{r}, \bar{t} = \bar{r} - 1 + 0) &= \frac{1}{\sqrt{\bar{r}}} \left(-\frac{7}{8\bar{r}} + \frac{3}{8} \right) \\ \bar{u}'' \cdot (\bar{r}, \bar{t} = \bar{r} - 1 + 0) &= \frac{1}{\sqrt{\bar{r}}} \left(\frac{3}{8\bar{r}} - \frac{3}{8} \right) \\ \bar{u}''' \cdot (\bar{r}, \bar{t} = \bar{r} - 1 + 0) &= \frac{1}{\sqrt{\bar{r}}} \left(\frac{105}{64\bar{r}^2} - \frac{33}{64\bar{r}} + \frac{3}{8} \right) \\ \bar{u}^{(4)} \cdot (\bar{r}, \bar{t} = \bar{r} - 1 + 0) &= \frac{1}{\sqrt{\bar{r}}} \left(-\frac{15}{64\bar{r}^2} - \frac{9}{64\bar{r}} + \frac{3}{8} \right) \end{aligned} \right\} \dots \quad (75).$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \bar{\sigma}_r}{\partial \bar{r}} &= \frac{1}{\sqrt{\bar{r}}} \left(\frac{11}{8\bar{r}} - \frac{\nu}{\bar{r}} - \frac{3}{8} \right) \\ \frac{\partial \bar{\sigma}_r}{\partial \bar{t}} &= \frac{1}{\sqrt{\bar{r}}} \left(-\frac{7}{8\bar{r}} + \frac{\nu}{\bar{r}} + \frac{3}{8} \right) \\ \frac{\partial^2 \bar{\sigma}_r}{\partial \bar{r}^2} &= \frac{1}{\sqrt{\bar{r}}} \left(-\frac{237}{64\bar{r}^2} + \frac{27\nu}{8\bar{r}^2} + \frac{45}{64\bar{r}} - \frac{3\nu}{8\bar{r}} - \frac{3}{8} \right) \\ \frac{\partial^2 \bar{\sigma}_r}{\partial \bar{t}^2} &= \frac{1}{\sqrt{\bar{r}}} \left(-\frac{21}{64\bar{r}^2} + \frac{3\nu}{8\bar{r}^2} + \frac{21}{64\bar{r}} - \frac{3\nu}{8\bar{r}} - \frac{3}{8} \right) \end{aligned} \right\} \dots \quad (76),$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \bar{\sigma}_\varphi}{\partial \bar{r}} &= \frac{1}{\sqrt{\bar{r}}} \left(-\frac{1}{\bar{r}} + \frac{11\nu}{8\bar{r}} - \frac{3\nu}{8} \right) \\ \frac{\partial \bar{\sigma}_\varphi}{\partial \bar{t}} &= \frac{1}{\sqrt{\bar{r}}} \left(\frac{1}{\bar{r}} - \frac{7\nu}{8\bar{r}} + \frac{3\nu}{8} \right) \\ \frac{\partial^2 \bar{\sigma}_\varphi}{\partial \bar{r}^2} &= \frac{1}{\sqrt{\bar{r}}} \left(\frac{27}{8\bar{r}^2} - \frac{237\nu}{64\bar{r}^2} - \frac{3}{8\bar{r}} + \frac{45\nu}{64\bar{r}} - \frac{3\nu}{8} \right) \\ \frac{\partial^2 \bar{\sigma}_\varphi}{\partial \bar{t}^2} &= \frac{1}{\sqrt{\bar{r}}} \left(\frac{3}{8\bar{r}^2} - \frac{21\nu}{64\bar{r}^2} - \frac{3}{8\bar{r}} + \frac{21\nu}{64\bar{r}} - \frac{3\nu}{8} \right) \end{aligned} \right\} \dots \quad (77).$$

Die Zustandsgrößen der Scheibe weiter hinter der Wellenfront werden wieder durch numerische Rechnung aus den Integralgleichungen für \bar{u} , \bar{u}' und \bar{u}'' ermittelt. Da diese Integralgleichungen genau so gebaut sind wie die im ersten Fall, so erhalten wir zur Berechnung von \bar{u} , \bar{u}' und \bar{u}'' Gleichungssysteme von demselben Typ wie früher (s. Gleichung (55)). Dabei sind die freien Funktionen f_{1n} , f_{2n} und f_{3n} dieselben wie in Abschnitt III, nur müssen jetzt die Koeffi-

zienten des Gleichungssystems (55) entsprechend dem neuen Kern (s. Gl. (68)) aus

$$k_{nm} = \int_{\bar{t}_{n-1}}^{\bar{t}} k(\bar{t}_n - \bar{\tau}) d\bar{\tau} = \sqrt{(1 + (n - m + 1)\delta)^2 - 1} - \sqrt{(1 + (n - m)\delta)^2 - 1} \quad (78)$$

berechnet werden.

Die Ergebnisse der numerischen Auswertung für $\nu = 0,3$ sind in den Bildern 8, 9 und 10 über der dimensionslosen Zeit \bar{t} aufgetragen mit \bar{r} als Parameter. Diese Bilder zeigen den Sprung, den die Spannungen $\bar{\sigma}_r$, $\bar{\sigma}_\varphi$ und die Teilchengeschwindigkeit \bar{u} beim Eintreffen der Wellenfront zur Zeit $\bar{t} = \bar{r} - 1$ entsprechend den Gesetzmäßigkeiten (73) und (74) erleiden. Nach dem

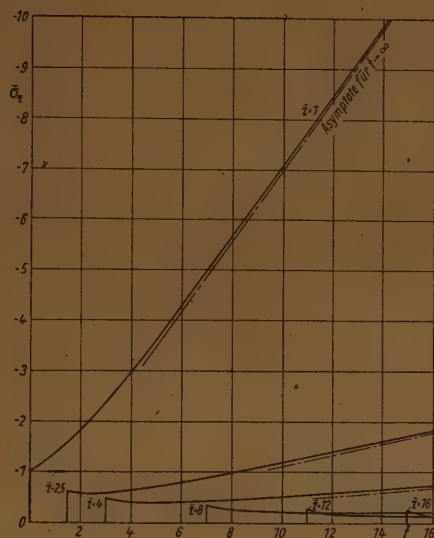


Bild 8. Zeitlicher Ablauf der Radialspannung $\bar{\sigma}_r = \frac{\sigma_r}{\sqrt{E' \rho} v_0} \frac{1}{v_0}$ bei plötzlich aufgezwungener Radialgeschwindigkeit v_0 am Lochrand $\bar{r} = r/a = 1$ ($\bar{t} = ct/a$).

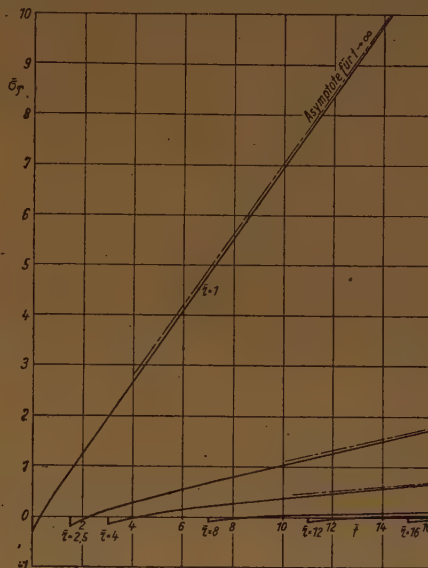


Bild 9. Zeitlicher Ablauf der Umfangsspannung $\bar{\sigma}_\varphi = \frac{\sigma_\varphi}{\sqrt{E' \rho} v_0} \frac{1}{v_0}$ bei plötzlich aufgezwungener Radialgeschwindigkeit v_0 am Lochrand $\bar{r} = r/a = 1$ ($\bar{t} = ct/a$).

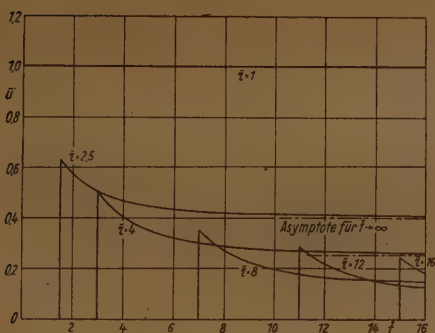


Bild 10. Zeitlicher Ablauf der Teilchengeschwindigkeit $\bar{u} = \frac{\partial u}{\partial t} \frac{1}{v_0}$ bei plötzlich aufgezwungener Radialgeschwindigkeit v_0 am Lochrand $\bar{r} = r/a = 1$ ($\bar{t} = ct/a$).

Durchschreiten der Wellenfront wächst der Betrag der Radialspannung $\bar{\sigma}_r$ für kleine \bar{r} (im Bild 8 nur bei $\bar{r} = 1$) monoton weiter. Für größere \bar{r} nimmt aber $\bar{\sigma}_r$ zunächst etwas ab, um erst dann wieder anzusteigen. Setzt man in Gl. (76) $\partial \bar{\sigma}_r / \partial \bar{t} = 0$, so erhält man die Grenze $\bar{r} = 1,533$, bei der die Radialspannung im ersten Augenblick konstant bleibt. Die Spannung $\bar{\sigma}_\varphi$ in der Umfangsrichtung steigt dagegen bei allen \bar{r} nach dem Durchschreiten der Wellenfront sofort an. Die Teilchengeschwindigkeit \bar{u} bleibt bei $\bar{r} = 1$ entsprechend der Randbedingung (7.2) konstant, während sie für alle $r > 1$ nach dem Durchschreiten der Wellenfront abnimmt und sich für $\bar{t} \rightarrow \infty$ asymptotisch einem konstanten Wert annähert. Auch an den Kurven für $\bar{\sigma}_r$ und $\bar{\sigma}_\varphi$ ist ein Übergang in einen stationären Zustand zu erkennen.

Da dieser nicht so einfach aus der Anschauung ermittelt werden kann, wie im ersten Fall, so wollen wir ihn mit Hilfe der komplexen Umkehrformel

$$u(\bar{r}, \bar{t}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{i\bar{t}\bar{p}} \bar{U}(\bar{r}, \bar{p}) d\bar{p} \quad (79)$$

untersuchen. Hier ist x so zu wählen, daß die Unterfunktion $\bar{U}(\bar{r}, \bar{p})$ in der rechts von x liegenden komplexen Halbebene regulär ist. Da die Watsonsche Funktion $K_1(z)$ bei $\operatorname{Re} z \geq 0$ keine Nullstellen besitzt¹¹⁾, so ist die Unterfunktion $\bar{U}(\bar{r}, \bar{p})$ für $\operatorname{Re} \bar{p} > 0$ regulär (s. Gl. (61)). Da-

gegen hat $\bar{U}(\bar{r}, \bar{p})$ für $\bar{p} \rightarrow 0$ wegen $K_1(\bar{p}) \rightarrow \frac{1}{\bar{p}}$ einen Pol $\frac{1}{\bar{r}} \bar{p}^2$. Wir spalten nun $\bar{U}(\bar{r}, \bar{p})$ in zwei Anteile auf¹²⁾:

$$\bar{U}(\bar{r}, \bar{p}) = \frac{1}{\bar{r} \bar{p}^2} + \Psi(\bar{r}, \bar{p}) \quad \dots \dots \dots (80),$$

wobei die Funktion

$$\Psi(\bar{r}, \bar{p}) = \frac{\bar{r} K_1(\bar{r} \bar{p}) - K_1(\bar{p})}{\bar{r} \bar{p}^2 K_1(\bar{p})} \quad \dots \dots \dots (81)$$

für $\operatorname{Re} \bar{p} > 0$ regulär ist und bei $\bar{p} \rightarrow 0$ nur logarithmisch wie $\frac{\bar{r}}{2} \ln \frac{\bar{r} \bar{p}}{2} - \frac{1}{2\bar{r}} \ln \frac{\bar{p}}{2}$ nach unendlich geht. Da $\frac{1}{\bar{p}^2}$ die Laplace-Transformierte von \bar{t} ist: $\frac{1}{\bar{p}^2} \leftrightarrow \bar{t}$, so erhält man aus der Umkehrformel (79) und aus (80) für die Oberfunktion den Ausdruck:

$$\bar{u}(\bar{r}, \bar{t}) = \frac{\bar{t}}{\bar{r}} + \int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{i\bar{p}\bar{t}} \Psi(\bar{r}, \bar{p}) d\bar{p} \quad \dots \dots \dots (82).$$

Wir zeigen jetzt, daß das Integral auf der rechten Seite dieser Gleichung für $\bar{t} \rightarrow \infty$ nach Null geht. Durch partielle Integration ergibt sich

$$\left[\frac{1}{\bar{t}} e^{i\bar{p}\bar{t}} \Psi(\bar{r}, \bar{p}) \right]_{\bar{p}=-i\infty}^{\bar{p}=+i\infty} - \frac{1}{\bar{t}} \int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{i\bar{p}\bar{t}} \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{p}} d\bar{p} \quad \dots \dots \dots (83).$$

Da $\Psi(\bar{r}, \bar{p})$ bei $\bar{p} \rightarrow \infty$ wegen $K_1(\bar{p}) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2\bar{p}}} e^{-\bar{p}}$ wie $1/\bar{p}^2$ nach Null geht¹³⁾, (s. Gl. (81)), so ist der erste Anteil in (83) unabhängig von der Größe von \bar{t} gleich Null. Man kann zeigen, daß $\partial \Psi / \partial \bar{p}$ bei $\bar{p} \rightarrow 0$ wie $\frac{1}{2\bar{p}} (\bar{r} - \frac{1}{\bar{r}})$ unendlich wird und bei $\bar{p} \rightarrow \infty$ wie $1/\bar{p}^2$ nach Null geht. Damit ist das Integral in (83) absolut konvergent, und für $\bar{t} \rightarrow \infty$ geht der zweite Ausdruck nach Null. Aus (82) erhält man dann für $\bar{t} \rightarrow \infty$

$$\bar{u}(\bar{r}, \bar{t}) = \frac{\bar{t}}{\bar{r}} \quad \dots \dots \dots (84).$$

Daraus folgt

$$\left. \begin{aligned} \bar{u}'(\bar{r}, \bar{t}) &= -\frac{\bar{t}}{\bar{r}^2} \\ \bar{u}(\bar{r}, \bar{t}) &= \frac{1}{\bar{r}} \end{aligned} \right\} \text{für } \bar{t} \rightarrow \infty \quad \dots \dots \dots (85).$$

Die Teilchengeschwindigkeit \bar{u} nähert sich bei wachsendem \bar{t} , wie bei der Diskussion der Kurven in Bild 10 festgestellt wurde, tatsächlich einer waagerechten Asymptote. Den asymptotischen Verlauf der Spannungen $\bar{\sigma}_r$ und $\bar{\sigma}_\varphi$ erhält man durch Einsetzen der Gl. (84) und (85) in das Elastizitätsgesetz (60)

$$\left. \begin{aligned} \bar{\sigma}_r &= -\frac{\bar{t}(1-\nu)}{\bar{r}^2} \\ \bar{\sigma}_\varphi &= +\frac{\bar{t}(1-\nu)}{\bar{r}^2} \end{aligned} \right\} \text{für } \bar{t} \rightarrow \infty \quad \dots \dots \dots (86).$$

Die durch numerische Auswertung der Integralgleichungen gewonnenen Kurven in den Bildern 8, 9 und 10 zeigen, daß bei kleineren Entfernungen \bar{r} die Zustandsgrößen der Scheibe sich ziemlich schnell den asymptotischen Werten nähern.

Man kann die sich asymptotisch einstellenden der Zeit proportionalen stationären Verschiebungen und Spannungen nach Gl. (84) und (86) mit den für den ersten Fall in Gl. (56) erhaltenen vergleichen, wenn man in beiden Fällen die Verschiebungen und Spannungen \bar{u} , $\bar{\sigma}_r$, $\bar{\sigma}_\varphi$ eines beliebigen Punktes durch die gleichzeitigen Zustandsgrößen \bar{u}_1 , $\bar{\sigma}_{r1}$, $\bar{\sigma}_{\varphi1}$ des Rand-

¹²⁾ s. Watson, S. 511.

¹³⁾ s. Doetsch, S. 270.

¹⁴⁾ s. Watson, S. 202, Gl. (1).

punktes bei $\bar{r} = 1$ dividiert. Man erhält dann in beiden Fällen

$$\bar{u}(\bar{r}, \bar{t}) = \bar{u}_1 \frac{1}{\bar{r}}$$

$$\bar{\sigma}_r(\bar{r}, \bar{t}) = \bar{\sigma}_{r1} \frac{1}{\bar{r}^2}$$

$$\bar{\sigma}_\varphi(\bar{r}, \bar{t}) = \bar{\sigma}_{\varphi1} \frac{1}{\bar{r}^2}$$

Da im ersten Fall die stationären Zustandsgrößen wie bei einer statischen Belastung der Scheibe verteilt sind, so kommen wir zu dem Schluß, daß auch im zweiten Fall mit der proportional zu der Zeit anwachsenden Verschiebung am Lochrand die Zustandsgrößen \bar{u} , $\bar{\sigma}_r$, $\bar{\sigma}_\varphi$ im Abstand $\bar{r} \neq 1$ im stationären Zustand in jedem Zeitpunkt wie statische Zustandsgrößen für die am Lochrand vorhandene Verschiebung $\bar{u}_1 = \bar{t}$ oder $u_1 = v_0 \bar{t}$ verteilt sind.

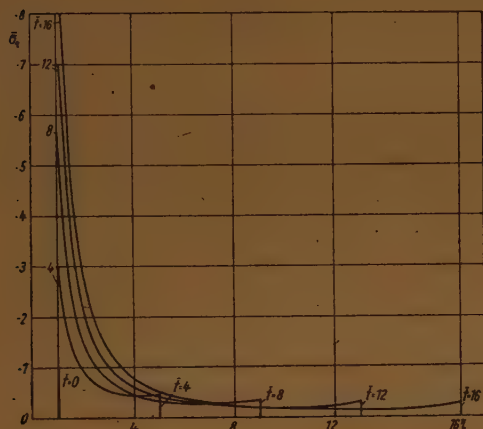


Bild 11. Ausbreitung der Radialspannung $\bar{\sigma}_r = \frac{\sigma_r}{\sqrt{E' \rho}} \frac{1}{v_0}$ bei plötzlich aufgezwungener Radialgeschwindigkeit v_0 am Lochrand $\bar{r} = r/a = 1$ ($\bar{t} = ct/a$).

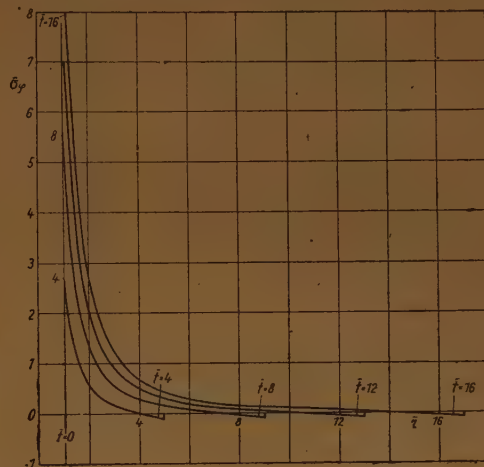


Bild 12. Ausbreitung der Umfangsspannung $\bar{\sigma}_\varphi = \frac{\sigma_\varphi}{\sqrt{E' \rho}} \frac{1}{v_0}$ bei plötzlich aufgezwungener Radialgeschwindigkeit v_0 am Lochrand $\bar{r} = r/a = 1$ ($\bar{t} = ct/a$).

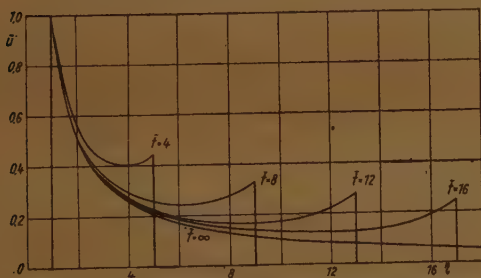


Bild 13. Ausbreitung der Teilchengeschwindigkeit $\bar{u} = \frac{du}{dt} \frac{1}{v_0}$ bei plötzlich aufgezwungener Radialgeschwindigkeit v_0 am Lochrand $\bar{r} = r/a = 1$ ($\bar{t} = ct/a$).

näherungsweise aus der in ihrem Bereich gültigen asymptotischen Formel (86) berechnen. Da diese Front nach oben nicht begrenzt ist, so kann man nur fragen, mit welcher Geschwindigkeit sich eine ganz bestimmte Spannung $\bar{\sigma}_r$ oder $\bar{\sigma}_\varphi$ ausbreitet. Aus (86) erhalten wir z. B.

$$\bar{r}^2 = - \frac{1 - \nu}{\bar{\sigma}_r} \bar{t}$$

und daraus

$$\frac{d\bar{r}}{d\bar{t}} = - \frac{1 - \nu}{\bar{\sigma}_r} \frac{1}{2\bar{r}}$$

oder wenn man nach (59) zu den dimensionsbehafteten Größen zurückkehrt

$$\frac{dr}{dt} = - \frac{(1 - \nu) E'}{\sigma_r} \frac{a}{2r} v_0.$$

Daraus kann man die Ausbreitungsgeschwindigkeit z. B. der Bruchspannung berechnen, wenn sie nicht bereits an der eigentlichen Wellenfront erreicht wird.

Eingegangen: Oktober 1947.

Asymptotische Entwicklung der Eigenwerte und Eigenfunktionen der Differentialgleichungen der Sphäroid-Funktionen und der Mathieuschen Funktionen.

Von J. Meixner in Aachen.

Die Eigenwerte λ der Differentialgleichung (1) der Sphäroidfunktionen werden für große positive und negative Werte des Parameters γ^2 durch Reihen nach fallenden Potenzen von γ dargestellt, von denen die Koeffizienten bis zum Glied γ^{-5} explizit angegeben werden. Die zugehörigen Eigenfunktionen werden nach den Funktionen des parabolischen Zylinders und nach Laguerreschen Orthogonalfunktionen entwickelt. Die gefundenen Reihenentwicklungen eignen sich zur numerischen Berechnung von Eigenwerten und Eigenfunktionen bei großen Parameterwerten. Die Ergebnisse lassen sich durch Spezialisierung auf die Mathieuschen Funktionen übertragen.

The eigen-values λ of the differential equation (1) of the spheroidal functions are presented, in the case that the parameter γ^2 has large positive or negative values, by series proceeding with descending powers of γ , the coefficients of which are given explicitly up to the term γ^{-5} . The corresponding eigen-functions are expanded in functions of the parabolic cylinder and in Laguerres orthogonal functions. The series expansions thus obtained are apt for the numerical calculation of eigen-values and eigen-functions in case of large values of the parameter. The results can be transferred to Mathieu's functions by specialization.

Pour des grandes valeurs positives ou négatives du paramètre γ^2 , les valeurs propres λ de l'équation différentielle (1) des fonctions sphéroidales sont exprimées par des séries en puissances décroissantes dont les coefficients sont donnés (jusqu'à γ^{-5}) d'une manière explicite. Les valeurs propres correspondantes sont développées en fonctions du cylindre parabolique ou en fonctions orthogonales de Laguerre. Les développements en série trouvés peuvent être utilisés pour le calcul numérique des valeurs et des fonctions propres des grandes valeurs de paramètre. A l'aide d'une petite modification, les résultats sont applicables aux fonctions de Mathieu.

Характеристические значения λ дифференциального уравнения (1) сфероидальных функций представляются в случае больших положительных или отрицательных значений параметра γ^2 в виде ряда по убывающим степеням от γ , причем точные значения их коэффициентов приведены для членов до γ^{-5} . Соответственные характеристические функции раскладываются по функциям параболического цилиндра и по ортогональным функциям Лагерра. Найденные ряды пригодны для численного определения характеристических значений и функций при больших параметрах. Результаты этой работы могут быть в частности применены к функциям матье.

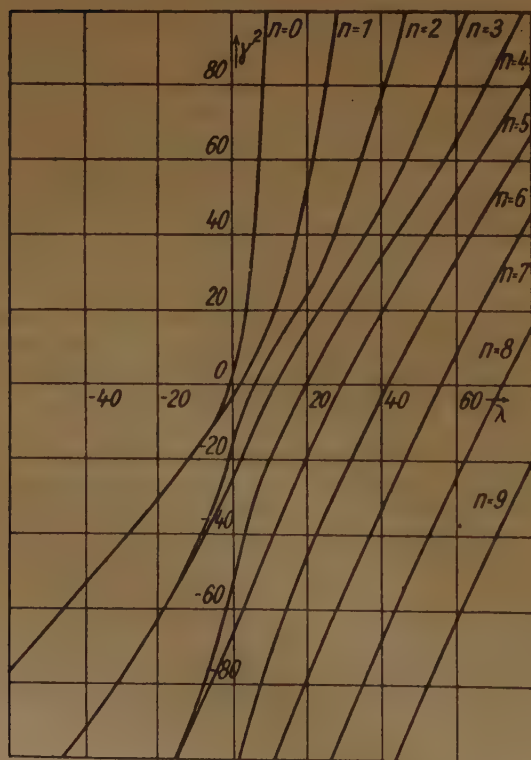


Bild 1. Verlauf der Kurven $\lambda = \lambda_n^2(\gamma)$ für niedrige Werte des Index n .

1. Aufgabenstellung. Die Separation der Wellengleichung in rotationselliptischen Koordinaten führt auf die Differentialgleichung

$$\left. \begin{aligned} (1-z^2) \frac{d^2 f}{dz^2} - 2z \frac{df}{dz} \\ + \left(\lambda - \frac{m^2}{1-z^2} - \gamma^2 z^2 \right) f = 0 \end{aligned} \right\} \quad (1).$$

m und λ sind Separationsparameter; der Parameter γ^2 hängt mit der Wellenzahl zusammen. Bei reeller Wellenzahl (dämpfungsfreie Probleme) ist γ^2 positiv oder negativ, je nachdem die eine Schar von Koordinatenflächen aus verlängerten oder abgeplatteten Rotationsellipsoiden besteht.

Die Lösungen der Differentialgleichung (1), die Sphäroidfunktionen, umfassen als Spezial- oder Grenzfälle die Kugelfunktionen, Zylinderfunktionen, die Laguerreschen Funktionen und die Funktionen des parabolischen Zylinders.

In vielen Anwendungen kommt es darauf an, Lösungen von (1) für $m = 0, 1, 2, \dots$ zu finden, welche in den singulären Punkten $z = \pm 1$ der Differentialgleichung endlich bleiben. Solche Lösungen, die Eigenfunktionen, gibt es nur für bestimmte Werte von λ , die Eigenwerte. Sie hängen noch von γ^2 ab; insbesondere im Spezialfall der Kugelfunktionen

$\gamma^2=0$ ist $\lambda = n(n+1)$, wo $n=m, m+1, m+2, \dots$. Für $m=0$ sind die niedrigsten Eigenwerte in Abhängigkeit von γ^2 in Bild 1 dargestellt.

Für kleine γ^2 kann man die Eigenwerte in konvergente Reihen nach steigenden Potenzen von γ^2 entwickeln. Die Koeffizienten der ersten Reihenglieder wurden erstmalig von Niven [1] berechnet. Numerische Tabellen der Koeffizienten bis γ^{10} für $n=0, 1, 2, \dots, 9, m=0, 1, \dots, n$ wurden vom Verfasser [2] angegeben.

Ziel der vorliegenden Arbeit ist, Eigenwerte und Eigenfunktionen der Differentialgleichung (1) für $m=0, 1, 2, \dots$ und sehr große positive oder negative Werte von γ^2 zu untersuchen. Die Ergebnisse lassen sich auf den Fall $m=\pm 1/2$ übertragen, in welchen (1), abgesehen von einer elementaren Transformation, in die Mathieusche Differentialgleichung übergeht.

2. Entwicklung der Eigenfunktionen nach Funktionen des parabolischen Zylinders.

Die Berechnung der charakteristischen Exponenten der Differentialgleichung (1) in $z=\pm 1$ zeigt, daß die durch $f(z)$

$$f(z) = (1 - z^2)^{m/2} \cdot g(z) \quad (2)$$

definierte Funktion $g(z)$ in $-1 \leq z \leq +1$ endlich ist und an den Intervallenden nicht verschwindet, wenn $f(z)$ eine Eigenfunktion von (1) ist. Sie genügt der Differentialgleichung

$$(1 - z^2) \frac{d^2 g}{dz^2} - 2(m+1)z \frac{dg}{dz} + [\lambda - m(m+1) - \gamma^2 z^2] g = 0 \quad (3).$$

Sei γ positiv und $z = \frac{v}{\sqrt{2}\gamma}$. Die singulären Stellen $z=\pm 1$ der Differentialgleichung (1) rücken dann in der neuen Veränderlichen v bei unbegrenzt wachsendem γ beiderseits ins Unendliche und (3) geht über in

$$\frac{d^2 g}{dv^2} + \left(N + \frac{1}{2} - \frac{v^2}{4}\right) g = 0 \quad (4),$$

wo die Bedeutung von N durch

$$N + \frac{1}{2} = \lim_{\gamma \rightarrow \infty} \frac{\lambda}{2\gamma} \quad (5)$$

gegeben ist. (4) ist die Differentialgleichung der Funktionen $D_N(v)$ des parabolischen Zylinders. Ihre Eigenwerte sind $N=0, 1, 2, \dots$. Für den Eigenwert λ ergibt sich so das asymptotische Verhalten $\lambda \sim (2N+1)\gamma$, die Eigenfunktion $f(z)$ wird durch $(1 - z^2)^{m/2} D_N(z\sqrt{2}\gamma)$ asymptotisch approximiert.

Zur genaueren Lösung von (1) versuchen wir den Ansatz

$$f(z) = (1 - z^2)^{m/2} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \alpha_r D_{N+r}(z\sqrt{2}\gamma) \quad (6),$$

wobei sich die Summe nur über alle geraden r erstreckt, da die Eigenfunktionen gerade oder ungerade in z sind, und wobei ferner

$$\alpha_r \rightarrow 0 \quad \text{für} \quad r \neq 0, \quad \gamma \rightarrow \infty \quad (7).$$

Einsetzen von (6) in (1) liefert nach einigen Umformungen, die von der Differentialgleichung und den Rekursionsformeln der Funktionen des parabolischen Zylinders Gebrauch machen, eine Gleichung der Form $\sum_r T_r \cdot D_{N+r} = 0$, für deren Bestehen die Bedingung $T_r = 0$ hinreichend ist. Sie lautet, ausführlich geschrieben,

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{r-1} - 4m\alpha_{r-2} + \left\{ -4\lambda + 8\gamma \left(N+r+\frac{1}{2}\right) + 4m^2 - 2(N+r+1)(N+r) - 3 \right\} \alpha_r \\ + 4m(N+r+2)(N+r+1)\alpha_{r+2} \\ + (N+r+4)(N+r+3)(N+r+2)(N+r+1)\alpha_{r+4} = 0 \\ r = 0, \pm 2, \pm 4, \dots \end{aligned} \right\} \quad (8).$$

Es liegt wegen (7) nahe, dieses Rekursionssystem durch Reihen nach fallenden Potenzen von γ nach den α_r aufzulösen, von denen die für α_0 mit einem konstanten Glied beginnt, während die anderen eine negative Potenz von γ als erstes Glied haben. Ein solcher Ansatz ist jedoch nur durchführbar, wenn λ selbst in bestimmter Weise durch eine Reihe nach fallenden Potenzen von γ dargestellt wird. Eine nähere Untersuchung zeigt, daß dann

$$\frac{\alpha_{\pm(4s+2)}}{\alpha_0} = O(\gamma^{-1-s}), \quad \frac{\alpha_{\pm 4s}}{\alpha_0} = O(\gamma^{-s}) \quad (s=0, 1, 2, \dots) \quad (9),$$

und es ergibt sich schließlich

$$\lambda(\gamma) = \gamma \cdot q + m^2 - \frac{1}{8} [q^2 + 5] - \frac{q}{64\gamma} [q^2 + 11 - 32m^2] - \frac{1}{1024\gamma^2} [5(q^4 + 26q^2 + 21) - 384m^2(q^2 + 1)] \\ - \frac{1}{\gamma^3} \left[\frac{1}{128 \cdot 128} (33q^5 + 1594q^3 + 5621q) - \frac{m^2}{128} (37q^3 + 167q) + \frac{m^4}{8} q \right] \\ - \frac{1}{\gamma^4} \left[\frac{1}{256 \cdot 256} (63q^6 + 4940q^4 + 43327q^2 + 22470) - \frac{m^2}{512} (115q^4 + 1310q^2 + 735) + \frac{3m^4}{8} (q^2 + 1) \right] \\ - \frac{1}{\gamma^5} \left[\frac{1}{1024 \cdot 1024} (527q^7 + 61529q^5 + 1043961q^3 + 2241599q) - \frac{m^2}{32 \cdot 1024} (5739q^5 + 127550q^3 + 298951q) + \frac{m^4}{512} (355q^3 + 1505q) - \frac{m^2}{16} q \right] + O(\gamma^{-6}) \quad (10),$$

$$\frac{\alpha_r}{\alpha_0} = \sum_{k \geq r} \frac{\alpha_{rk}(q)}{\gamma^k} \quad (r = 2, 4, 6, \dots) \\ \frac{\alpha_{-r}}{\alpha_0} = \sum_{k \geq r} (-1)^{r/2+k} \frac{\left[\frac{1}{2}(q-1) \right]!}{\left[\frac{1}{2}(q-1) - r \right]!} \cdot \frac{\alpha_{rk}(-q)}{\gamma^k} \quad (r = 2, 4, 6, \dots) \quad (11).$$

worin $q = 2N + 1 = 1, 3, 5, \dots$ und

$$\alpha_{21} = +\frac{m}{4}, \quad \alpha_{22} = -\frac{m}{512} (q^2 - 52q - 93); \\ \alpha_{23} = +\frac{m}{2048} [-3q^3 + 108q^2 + 343q + 560] - \frac{m^2}{512} [q^2 - 4q + 35]; \\ \alpha_{41} = -\frac{1}{32}, \quad \alpha_{42} = -\frac{1}{128} (q + 4 - 4m^2); \\ \alpha_{43} = -\frac{1}{1024 \cdot 1024} [q^4 - 16q^3 + 2902q^2 + 22352q + 52073] + \frac{m^2}{128} (3q + 10); \\ \alpha_{62} = -\frac{m}{128}, \quad \alpha_{63} = +\frac{m}{96 \cdot 1024} [3q^2 - 492q - 1975] + \frac{m^3}{3 \cdot 128}, \quad \alpha_{64} = +\frac{1}{2048}; \\ \alpha_{83} = +\frac{1}{4096} (q + 6) - \frac{m^2}{1024}, \quad \alpha_{10,3} = +\frac{m}{8192}, \quad \alpha_{12,3} = -\frac{1}{192 \cdot 1024} \quad \text{usw.} \quad (12).$$

Der Grenzfall $\gamma = 0$ führt auf die Differentialgleichung der Kugelfunktionen und daher auf die Kugelfunktionen $P_n^m(z)$ als Eigenfunktionen. Die Zuordnung zwischen n und N ergibt sich durch Abzählung der von γ unabhängigen Anzahl der Nullstellen im Intervall $-1 < z < +1$ zu

$$n - m = N = \frac{q-1}{2} \dots \dots \dots (13).$$

Tafel 1 enthält einige mit (10) unter Ausschluß der Glieder der Ordnung γ^{-6} berechnete Eigenwerte. Sie werden mit den auf 6 Dezimalen genauen Werten verglichen. Die letzte Spalte der Tafel gibt das letzte in (10) berücksichtigte Reihenglied.

Tafel 1. Einige Eigenwerte für $m = 0, q = 1$.

γ^2	Eigenwert	Näherung (10)	Letztes Glied in (10)
10	+2,305040	+2,29376	-0,01010
25	+4,195129	+4,196836	-0,001022
100	+9,228304	+9,228324	-0,000032

3. Entwicklung der Eigenfunktionen nach Laguerreschen Funktionen. Für $-\gamma^2 \gg 1$ sind die oben berechneten Reihen nicht brauchbar. Wir setzen in (3) $-\gamma^2 = \gamma'^2$. γ' sei positiv angenommen. Die Transformation $v = 2\gamma'(1-z)$ führt den singulären Punkt $z=1$ in $v=0$

über, während der singuläre Punkt $z = -1$ mit $\gamma' \rightarrow \infty$ in $v \rightarrow \infty$ übergeht. In der Grenze ergibt sich die Differentialgleichung der mit $e^{-v/2}$ multiplizierten Laguerreschen Polynome $L_N^{(m)}(v)$. Dabei ist

$$N = -\frac{1}{2}(m+1) + \lim_{\gamma' \rightarrow \infty} \frac{(\lambda + \gamma'^2)}{4\gamma'} \quad (14).$$

Die Eigenwerte der Laguerreschen Differentialgleichung sind $N = 0, 1, 2, \dots$. Für λ gilt somit asymptotisch

$$\lambda \sim -\gamma'^2 + (2N + m + 1) \cdot 2\gamma' \quad (15).$$

Da die Eigenfunktionen von (1) in z gerade oder ungerade sind, versuchen wir zur Lösung von (1) den Ansatz

$$f(z) = (1 - z^2)^{m/2} \sum_{t=0}^{\infty} \beta_t [e^{\gamma' z} \cdot L_{N+t}^{(m)}(2\gamma'(1-z)) \pm e^{-\gamma' z} L_{N+t}^{(m)}(2\gamma'(1+z))] \quad (16),$$

dessen Koeffizienten β_t für $t \neq 0$ alle gegen Null streben sollen wenn $\gamma' \rightarrow \infty$. Wir gehen mit diesem Ansatz wieder in (1) ein und erhalten nach einigen Umformungen mit Hilfe der Differentialgleichung und der Rekursionsformeln der Laguerreschen Polynome in ähnlicher Weise wie im zweiten Abschnitt ein dreigliedriges Rekursionssystem zur Berechnung der β_t .

$$(p + 2t + 1 + m)(p + 2t + 1 - m)\beta_{t+1} + (p + 2t - 1 + m)(p + 2t - 1 - m)\beta_{t-1} = [4(\lambda + \gamma'^2 - 2\gamma'p) + 2(p^2 - m^2 + 1) + 8t(p - 2\gamma' + t)]\beta_t \quad (17).$$

Hierin ist

$$p = 2N + m + 1 \quad (18)$$

gesetzt. Der Ansatz von fallenden Potenzreihen in γ für λ und die β_t liefert in ähnlicher Weise wie oben

$$\left. \begin{aligned} \lambda = & -\gamma'^2 + 2\gamma'p - \frac{1}{2}(p^2 - m^2 + 1) - \frac{p}{8\gamma'}(p^2 - m^2 + 1) - \frac{1}{64\gamma'^2}[5p^4 + 10p^2 \\ & + 1 - 2m^2(3p^2 + 1) + m^4] \\ & - \frac{p}{512\gamma'^3}[33p^4 + 114p^2 + 37 - 2m^2(23p^2 + 25) + 13m^4] \\ & - \frac{1}{1024\gamma'^4}[63p^6 + 340p^4 + 239p^2 + 14 - 10m^2(10p^4 + 23p^2 + 3) \\ & + 3m^4(13p^2 + 6) - 2m^6] \\ & - \frac{p}{8192\gamma'^5}[527p^6 + 4139p^4 + 5221p^2 + 1009 - m^2(939p^4 + 3750p^2 + 1591) \\ & + m^4(465p^2 + 635) - 53m^6] + O(\gamma'^{-6}) \end{aligned} \right\} \quad (19),$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\beta_t}{\beta_0} &= \sum_{k=t}^{\infty} \frac{\beta_{tk}(p)}{\gamma'^k} \quad (t = 1, 2, 3, \dots) \\ \frac{\beta_{-t}}{\beta_0} &= \sum_{k=t}^{\infty} (-1)^k \frac{\beta_{tk}(-p)}{\gamma'^k} \quad (t = 1, 2, 3, \dots) \end{aligned} \right\} \quad (20),$$

mit

$$\left. \begin{aligned} \beta_{11} &= -\frac{1}{16}[(p+1)^2 - m^2]; \quad \beta_{12} = -\frac{1}{32}[(p+1)^2 - m^2](p+1); \\ \beta_{13} &= \frac{1}{8192}[(p+1)^2 - m^2][p^4 + 4p^3 - 182p^2 - 348p - 209 + 2m^2(p^2 - 2p + 9) - m^4]; \\ \beta_{22} &= \frac{1}{512}[(p+1)^2 - m^2][(p+3)^2 - m^2]; \quad \beta_{23} = \frac{1}{1024}[(p+1)^2 - m^2][(p+3)^2 - m^2] \\ & \quad (2p+3); \\ \beta_{33} &= -\frac{1}{3 \cdot 8192}[(p+1)^3 - m^2][(p+3)^3 - m^2][(p+5)^2 - m^2] \text{ usw.} \end{aligned} \right\} \quad (21).$$

Die Zahl der Nullstellen der Eigenfunktion (16) in $-1 < z < +1$ ist wieder von γ' unabhängig. Für sehr große γ' ist nur das Reihenglied mit $t=0$ von Bedeutung. In der Nähe von $z = +1$ überwiegt sein erster Term sehr stark den zweiten, in der Nähe von $z = -1$ ist es umgekehrt. Jeder Term hat N -Nullstellen; sie liegen in der Nähe von $z = +1$ bzw. $z = -1$; dazu kommt im Falle des unteren Vorzeichens eine Nullstelle bei $z = 0$. Der Vergleich mit der Zahl der Nullstellen von $P_n^m(z)$, d. h. im anderen Grenzfall $\gamma' = 0$, gibt somit $n - m = 2N = p - m - 1$ für gerade $n - m$ und $n - m = 2N + 1 = p - m$ für ungerade $n - m$, oder

$$p = n + 1 \text{ für gerade } n - m, \quad p = n \text{ für ungerade } n - m \quad (22).$$

Zu jedem $p = m + 1, m + 3, m + 5, \dots$ gehören nach (16) zwei Eigenfunktionen, von denen die eine gerade, die andere ungerade in z ist. Doch sind die beiden zugehörigen Eigenwerte nicht einander gleich [zu jedem Eigenwert gibt es nur eine Eigenfunktion der Differentialgleichung (1)], sie stimmen nur asymptotisch überein. Die Eigenwertkurven laufen für $\gamma' \rightarrow \infty$, d. h. $\gamma^2 \rightarrow -\infty$ paarweise zusammen, wie die Abbildung zeigt. Die geraden Eigenfunktionen gehören zu $p - 1 = n = m, m + 2, m + 4$, die ungeraden zu $p = n = m + 1, m + 3, m + 5, \dots$. Dies folgt aus den Symmetrieeigenschaften der Kugelfunktionen $P_n^m(z)$, die dem Grenzfalle $\gamma = 0$ entsprechen.

Tafel 2 enthält einige Paare von Eigenwerten, wie sie Bouwkamp [3] numerisch auf 6 bzw. 5 Dezimalen genau berechnet hat, ihren Mittelwert, sowie die Näherung dieses Paares von Eigenwerten durch die Reihe (19) mit Ausschluß der Glieder $O(\gamma'^{-6})$, ferner den Wert des letzten berücksichtigten Gliedes.

Tafel 2. Einige Eigenwertpaare für $m = 0, p = 1$ und $p = 3$.

γ'^2	Eigenwertpaar	Mittelwert	Näherung (19)	Letztes Glied in (19)
$m = 0, p = 1$				
10	— 4,607952 — 4,976896	— 4,792424	— 4,80148	— 0,0042
25	— 16,05041 — 16,07904	— 16,06472	— 16,06433	— 0,00042
50	— 36,99015 — 36,89912	— 36,89963	— 36,89957	— 0,000076
100	— 81,02794 — 81,02794	— 81,02794	— 81,02794	— 0,000013
$m = 0, p = 3$				
100	— 45,48967 — 45,48391	— 45,48679	— 45,48459	— 0,00281

4. Ergänzende Bemerkungen. Die Nullstellen der Eigenfunktionen werden für sehr große positive γ durch die Nullstellen der Hermiteschen Polynome mit dem Argument $z\sqrt{2}\gamma$, für große positive γ' durch die Nullstellen der Laguerreschen Polynome mit dem Argument $2\gamma' \cdot (1 \pm z)$ approximiert. Im ersten Fall ist die Verteilung der Nullstellen für $\gamma \rightarrow \infty$ unabhängig von m ; sie rücken mit wachsendem γ immer näher an den Punkt $z = 0$ heran. Im zweiten Fall nähern sie sich mit wachsendem γ' immer mehr den Punkten $z = \pm 1$. Auch die Lage der Nullstellen läßt sich nach fallenden Potenzen von γ bzw. γ' entwickeln.

Die Bedeutung der Reihen (10) und (19) beschränkt sich nicht auf ganze m und auch nicht nur auf die Eigenwerte der Differentialgleichung (1). Ein Beispiel nicht ganzer m (nämlich $m = \pm 1/2$) wird im nächsten Abschnitt behandelt. Ein besonders charakteristisches Beispiel, wo die Reihe (19) einen Sinn hat, obwohl sie keinen Eigenwert approximiert, ist folgendes. Definiert man den Wert $\lambda_n^m(\gamma)$ des Separationsparameters λ in (1) durch die Forderungen, daß es Lösungen dieser Differentialgleichung gibt, welche sich bei einem Umlauf um den unendlich fernen Punkt mit 1 multiplizieren und daß $\lambda_n^m(\gamma)$ für $\gamma \rightarrow 0$ stetig in $n(n+1)$ übergeht, so läßt sich zeigen, daß beispielsweise

$$\left. \begin{aligned} \lambda_0^1(\gamma) &= \gamma^2; \quad \lambda_0^2(\gamma) = \gamma^2 + 1 - \sqrt{1 - 4\gamma^2} = -\gamma'^2 - 2\gamma' + 1 - \frac{1}{4\gamma'} + \frac{1}{64\gamma'^3} - \frac{1}{512\gamma'^5} \dots; \\ \lambda_1^2(\gamma) &= \gamma^2 + 1 + \sqrt{1 - 4\gamma^2} = -\gamma'^2 + 2\gamma' + 1 + \frac{1}{4\gamma'} - \frac{1}{64\gamma'^3} + \frac{1}{512\gamma'^5} \dots \end{aligned} \right\} (22).$$

Allgemein läßt sich zeigen, daß die $\lambda_n^m(\gamma)$ für ganze positive m und für $n = 0, 1, 2, \dots, m - 1$ die Wurzeln einer algebraischen Gleichung in λ vom Grad m mit in γ und m rationalen Koeffizienten sind.

Die Reihe (19) reduziert sich für $m = 1$ und $n = 0$ (d. h. $p = 0$) auf das erste Glied und stimmt somit vollständig mit (22) überein. Etwas verwickelter liegen bereits die Verhältnisse für $m = 2$ und $n = 0$ bzw. $n = 1$ (d. h. $p = 1$). Hier stimmt die Reihe (19) mit $\lambda_1^2(\gamma)$ in (22) auch in den in (19) nicht angegebenen Gliedern überein, wovon man sich leicht überzeugt; der andere Wert $\lambda_0^2(\gamma)$ wird nicht durch diese Reihe dargestellt. Es ist jedoch bemerkenswert, daß wenigstens einer dieses Paares von λ -Werten durch die Reihe (19) richtig wiedergegeben wird und daß diese Reihe für $2p > 1$ konvergent ist.

Die formale Herleitung der Reihen (10), (11) und (19), (20) gibt keinen Aufschluß, ob diese Reihen, sowie die Reihen (6) und (16) konvergent sind. An anderer Stelle soll gezeigt werden, daß diese Reihen tatsächlich im allgemeinen nicht konvergieren, jedoch asymptotischen Charakter

haben, wie dies für die entsprechenden Entwicklungen der Mathieschen Funktionen und ihrer Eigenwerte schon von Goldstein [4] und Ince [5] vermutet worden ist.

Die bisher vorliegenden Berechnungen der Reihe (19) geben alle weniger Glieder an. Baber und Hasse [6] berechnen als letztes das Glied mit $1/\gamma'$; nur für $N=0$ geben sie zwei weitere Glieder an. Bouwkamp [3] gibt zwar noch die Glieder der Ordnung γ'^{-2} an, aber nur im Spezialfall $m=0$. Die Entwicklung nach Laguerreschen Orthogonalfunktionen dürfte sich zuerst bei Svartholm (7) finden, bei den früheren Untersuchungen wurde statt der Summe in (16) eine Reihe nach steigenden Potenzen von $2\gamma'(1\pm z)$ angesetzt.

Zur Reihe (10) ist uns nur eine Berechnung von W. F. Eberlein (Princeton, N. J.) bekannt geworden (durch eine freundliche Mitteilung von A. N. Lowan, New York, wofür auch an dieser Stelle herzlich gedankt sei), welche sich bis zum Reihenglied der Ordnung γ^{-3} erstreckt.

5. h -Asymptotik der Mathieschen Differentialgleichung. In unseren Reihen (6), (10), (11) und (16), (19), (20) sind auch entsprechende Ergebnisse für die Mathiesche Differentialgleichung als Spezialfall enthalten. Diese Differentialgleichung läßt sich aus (1) durch eine einfache Transformation gewinnen. Sei

$$f(z) = (1 - z^2)^{-1/4} \cdot G(\Theta); \quad z = \cos \Theta \quad \dots \dots \dots (23).$$

Dann ergibt sich aus (1) für $G(\Theta)$ die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 G}{d\Theta^2} + \left[\lambda + \frac{1}{4} - \gamma^2 \cos^2 \Theta - \frac{m^2 - \frac{1}{4}}{\sin^2 \Theta} \right] G = 0 \quad \dots \dots \dots (24).$$

Dies ist für $m^2 = \frac{1}{4}$ die Mathiesche Differentialgleichung. Setzen wir $\lambda + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \gamma^2 = A$ und $\gamma^2 = 4h^2$, so nimmt sie ihre Normalform (Strutt [8])

$$\frac{d^2 G}{d\Theta^2} + [A - 2h^2 \cos 2\Theta] G = 0 \quad \dots \dots \dots (25)$$

an. Das Eigenwertproblem weist hier gegenüber dem der Sphäroidfunktionen kleine Unterschiede auf. Das Grundgebiet erstreckt sich hier von 0 bis 2π (dort war es $-1 \leq z \leq +1$, d. h. wegen (23) $0 \leq \Theta \leq \pi$); es gilt die Randbedingung der Periodizität $G(0 + 2\pi) = G(\Theta)$.

Wählen wir in (6) $m = -\frac{1}{2}$, so ergibt sich nach (23) für $G(\Theta)$ der Ansatz

$$G(\Theta) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \alpha_r D_{N+r}(2\sqrt{h} \cos \Theta) \quad \dots \dots \dots (26),$$

wobei wir $h > 0$ voraussetzen. Der Summationsindex r nimmt auch hier nur gerade Werte an.

Das fünfgliedrige Rekursionssystem (8) geht für $m = -\frac{1}{2}$ in den neuen Bezeichnungen über in

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{r-4} + 2\alpha_{r-2} + [-4A - 8h^2 + 8h \cdot (2N + 2r + 1) - 2(N + r + 1)(N + r) - 1] \alpha_r \\ - 2(N + r + 2)(N + r + 1) \alpha_{r+2} + (N + r + 4)(N + r + 3)(N + r + 2)(N + r + 1) \alpha_{r+4} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (27),$$

$(r = 0; \pm 2, \pm 4, \dots)$

Der Ansatz (26) approximiert die Mathieschen Funktionen $ce_N(\Theta; h)$.

Setzen wir dagegen in (6) $m = +1/2$, so ergibt sich statt (26) der Ansatz

$$G(\Theta) = \sin \Theta \cdot \sum_{r=-\infty}^{\infty} i^r \alpha_r D_{N+r}(2\sqrt{h} \cos \Theta) \quad \dots \dots \dots (28).$$

Die Rekursionssysteme (8) für $m = +\frac{1}{2}$ und $m = -\frac{1}{2}$ gehen ineinander über, wenn man α_r durch $i^r \cdot \alpha_r$ ersetzt. Aus diesem Grunde ist in (28) der Faktor i^r eingefügt. Die α_r in (28) sind dann dieselben wie in (26), genügen also auch (27). Durch (28) werden die Funktionen $se_{N+1}(\Theta; h)$ approximiert.

Für A folgt aus (10) für $m = \pm \frac{1}{2}$

$$\left. \begin{aligned} A = & -2h^2 + 2qh - \frac{1}{8}(q^2 + 1) - \frac{1}{128h}(q^3 + 3q) - \frac{1}{4096h^2}(5q^4 + 34q^2 + 9) \\ & - \frac{1}{2^{17}h^3}(33q^5 + 410q^3 + 405q) - \frac{1}{2^{20}h^4}(63q^6 + 1260q^4 + 2943q^2 + 486) \\ & - \frac{1}{2^{25}h^5}(527q^7 + 15617q^5 + 69001q^3 + 41607q) + O(h^{-6}) \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (29).$$

Hierin ist $q = 2N + 1$. Das Funktionenpaar ce_N und se_{N+1} gehört also, wenn $h > 0$, asymptotisch zum gleichen Eigenwert.

Andere asymptotische Reihen ergeben sich aus der Entwicklung (16) nach Laguerreschen Orthogonalfunktionen für $m = \pm \frac{1}{2}$. Wegen des Zusammenhangs der Laguerreschen Polynome vom oberen Index $\pm \frac{1}{2}$ mit den Hermiteschen Polynomen ergeben sich auch hier Entwicklungen nach den Funktionen des parabolischen Zylinders, doch haben sie andere Argumente als (26) und (28). Von ihrer Wiedergabe sehen wir wegen ihrer komplizierteren Bauart ab.

Die Normierung der Mathieschen Funktionen

$$\int_0^{2\pi} ce_N(\Theta; h)^2 d\Theta = \int_0^{2\pi} se_{N+1}(\Theta; h)^2 d\Theta = \pi \quad (N = 0, 1, 2, \dots) \quad (30)$$

kann auch an den asymptotischen Reihen vorgenommen werden und liefert beispielsweise

$$\alpha_0 = \left(\frac{\pi h}{2}\right)^{1/4} (N!)^{-1/2} [1 + O(h^{-1})] \quad \text{für } ce_N, se_{N+1} \dots \dots \dots (31).$$

Hieraus lassen sich ferner asymptotische Ausdrücke für die Koeffizienten der Entwicklungen der Mathieschen Funktionen in Fourier-Reihen gewinnen. Beispielsweise ist für große h

$$ce_{2n}(\Theta; h) = \sum_{s=0}^{\infty} A_{2s}^{(2n)} \cos 2s\Theta \sim \alpha_0 D_{2n}(2\sqrt{h} \cos \Theta) \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (32).$$

Die Koeffizienten $A_{2s}^{(2n)}$ bestimmen sich in bekannter Weise aus dem Integral über $D_{2n}(2\sqrt{h} \cos \Theta) \cos 2s\Theta$. In diesem Integral geben für große positive h nur die Umgebungen von $\Theta = \frac{\pi}{2}$ und $\Theta = 3\frac{\pi}{2}$ wesentliche Beiträge. Man kann daher $\cos \Theta$ in der Umgebung dieser Stellen entwickeln und, wenn s hinreichend klein ist, $\cos 2s\Theta$ durch $+1$ bzw. -1 ersetzen, je nachdem ob s gerade oder ungerade ist. Die Integration liefert dann

$$\left. \begin{aligned} A_0^{(2n)} &= 2^{-n-1/4} \frac{\sqrt{(2n)!}}{n!} (-1)^s (\pi h)^{-1/4} [1 + O(h^{-1})], \\ A_{2s}^{(2n)} &= 2^{-n+3/4} \frac{\sqrt{(2n)!}}{n!} (-1)^s (\pi h)^{-1/4} [1 + O(h^{-1})], \quad (s = 1, 2, 3, \dots) \end{aligned} \right\} \quad (33).$$

Entsprechend findet man asymptotische Ausdrücke für die Fourier-Koeffizienten der anderen Mathieschen Funktionen. Als Zahlenbeispiel diene für $h=6$ der asymptotische Wert $A_0^{(0)} = 0,404$ gegenüber dem auf vier Dezimalen genauen Wert 0,4093. Doch wird diese Näherung bei diesem verhältnismäßig kleinen Wert von h bereits schlecht für $A_3^{(0)}$.

Die Reihe (29) für die Eigenwerte der Mathieschen Differentialgleichung ist von Goldstein [4] und Ince [5] nach einem anderen Verfahren gefunden worden. Es besteht, auf die allgemeinere Differentialgleichung (4) angewandt, in dem Ansatz

$$f(z) = (1 - z^2)^{m/2} e^{\gamma \Phi(z)} \psi(z) [1 + \gamma^{-1} \cdot \Phi_1(z) + \gamma^{-2} \cdot \Phi_2(z) + \dots] \quad (34),$$

$$A = A\gamma^2 + B\gamma + C_0 + m(m+1) + \gamma^{-1} \cdot C_1 + \gamma^{-2} \cdot C_2 + \dots \quad (35).$$

Hierin sollen die zu bestimmenden Funktionen $\Phi(z)$, $\psi(z)$, $\Phi_1(z)$, $\Phi_2(z)$, ... und Konstanten A, B, C_0, C_1, \dots von γ frei sein.

Dieses Verfahren versagt jedoch gerade in den z -Bereichen, in welchen die Nullstellen der Funktion $f(z)$ im Intervall $-1 < z < +1$ liegen und bringt nicht zum Ausdruck, daß als Grenzfall für $\gamma \rightarrow \infty$ bzw. $\gamma \rightarrow i\infty$ die Funktionen des parabolischen Zylinders bzw. die Laguerreschen Orthogonalfunktionen entstehen. Die Rechnungen, die zur Durchführung dieses Verfahrens erforderlich sind, gestalten sich erheblich langwieriger als bei dem von uns eingeschlagenen Weg.

Literaturverzeichnis.

- [1] W. D. Niven: Philos. Trans. Roy. Soc. London **171** (1881) S. 117.
- [2] J. Meixner: Bericht der ZWB, Nr. 1952 (1944).
- [3] Ch. J. Bouwkamp: Theoretische en numerieke behandeling van de buiging door en ronde opening. Diss. (Groningen). Groningen-Batavia 1941.
- [4] S. Goldstein: Trans. Cambridge Philos. Soc. **23** (1927), S. 303.
- [5] E. L. Ince: Proc. Roy. Soc. Edinburgh **46** (1926), S. 316.
- [6] W. G. Baber und H. R. Hassé: Proc. Cambridge Philos. Soc. **31** (1935), S. 564.
- [7] N. Svartholm: Z. Physik **111** (1938), S. 186.
- [8] M. J. O. Strutt: Lamésche, Mathiesche und verwandte Funktionen in Physik und Technik. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. Bd. I, Heft 3. Berlin: Springer 1932.

Geometrische Betrachtungen über eine Verallgemeinerung der Reliefperspektive.

Von Fred Röblier in Aachen.

Es werden geometrische Eigenschaften für ein neues Abbildungsverfahren (für Rundreliefe) angegeben, das in Analogie zur Reliefperspektive jedoch mit der Abweichung von dieser festgelegt wird, daß der Ort der Inzidenz- und der der Fluchtpunkte nunmehr gewisse Zylinder sind.

Some geometrical properties are referred with regard to a new method of mapping (of round reliefs) that is analogous to the relief perspective but differs from it by the fact that the loci of the incidence and vanishing points are certain cylinders.

L'auteur donne quelques propriétés géométriques d'un nouveau procédé de représentation (pour des reliefs ronds) qui est analogue à la perspective de relief, mais qui diffère d'elle par le fait que les lieux de l'incidence et les points de fuite sont certains cylindres.

В этой работе описываются геометрические свойства нового метода отображения (для круглых рельефов). Этот метод аналогичен рельефной перспективе, отличается от нее однако тем, что геометрическим местом следов и точек схода являются некоторые цилиндры.

Ein Objekt, das man aus einem im Endlichen gelegenen Punkt betrachtet, werde einer zentrisch-kollinearen Transformation mit diesem Punkte als Kollineationszentrum unterworfen; steht dabei die Fluchtebene der zentrischen Kollineation vor dem Beschauer und die Kollineationsebene (auch Spurebene genannt) zwischen dem Beschauer und der Fluchtebene, so erhält ein etwa hinter der Kollineationsebene liegendes Objekt durch die zentrische Kollineation ein räumliches Abbild, das zwischen den beiden genannten Ebenen gelegen ist und das dem Auge des Beschauers einen ähnlichen Gesichtseindruck hervorzurufen vermag wie das Objekt selbst. Man nennt ein solches Abbild ein Reliefbild oder kurz Relief, die geschilderte Abbildungsmethode Reliefperspektive¹⁾; ihr Anwendungsgebiet ist die Reliefplastik und die Bühnendekoration (Theaterspektive).

In der vorliegenden Arbeit wird ein neues Abbildungsverfahren definiert, das der Reliefperspektive analog ist, bei dem jedoch an Stelle der Spurebene und Fluchtebene Zylinder treten. Eine solche Abbildung kann in der Reliefplastik mit zylindrischem Hintergrund (Rundrelief an einer zylindrischen Wand) und in der Theaterperspektive (bei einer Bühne mit Rundhorizont) Anwendung finden.

Im Hauptteil der Arbeit werden die geometrischen Eigenschaften der Verwandtschaft für den Fall besprochen, daß die beiden genannten Zylinder koaxiale Drehzylinder sind und das Auge auf ihrer Achse liegt; am Schluß werden Ausblicke auf Verallgemeinerungen dieser Voraussetzungen angegeben.

I.

Gegeben sei (Bild 1) ein Drehzylinder α mit der (vertikal gedachten) Achse z und dem Radius a und ein mit ihm koaxialer Drehzylinder $\bar{\varphi}$ mit dem Radius f ($f > a$). Für ein Auge O auf der Achse z betrachten wir eine zentrische Verwandtschaft, bei der entsprechende Punkte auf einem Strahl durch O liegen, α der Ort der Inzidenzpunkte (außer O) ist und die Fernpunkte ihr Bild auf $\bar{\varphi}$ haben. Ist P ein Punkt, dessen Bild \bar{P} festgelegt werden soll, so ziehe man den Halbstrahl (OP) , der den Zylinder α in dem Punkte A , den Zylinder $\bar{\varphi}$ in dem Punkte \bar{F} , dem Bild des Fernpunktes F_∞ von (OP) , schneidet. Verlangt man, daß das Doppelverhältnis

$$(OAFP) = (O\bar{A}\bar{F}_\infty P) \quad (1)$$

sei, so ist damit die Verwandtschaft festgelegt.

Dabei hat man — wie das Wort Halbstrahl besagen soll und wie in Bild 1 dargestellt ist — diejenigen Punkte A und \bar{F} als Schnittpunkte zu wählen, die beide auf derselben Seite von O liegen wie P . Für die Darstellung eines Rundreliefs ist nur ein so erhaltener Bildpunkt \bar{P} von Bedeutung. Wählt man als A und \bar{F} diejenigen Durchstoßpunkte der

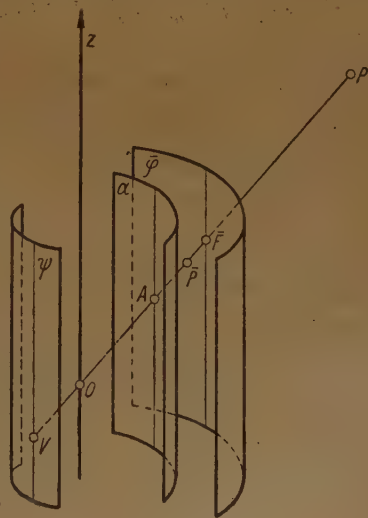


Bild 1.

¹⁾ Vgl. Chr. Wiener, Lehrb. d. darst. Geometrie, Leipzig 1884, I. Bd. S. 47 ff. — R. Staudigl, Grundzüge der Reliefperspektive, Wien 1868. — L. Burmester, Grundzüge der Reliefperspektive nebst Anwendung zur Herstellung reliefperspektivischer Modelle, Leipzig 1883. — L. Burmester, Grundrissen der Theaterperspektive, Allgem. Bauzeitung 1884, S. 39, 44, 53. — E. Müller, Vorlesungen über darstellende Geometrie, I. Bd.: Die linearen Abbildungen, bearb. v. E. Kruppa, Wien 1923, S. 229 bis 234. — A. Stuhlmann, Lehrb. d. Reliefperspektive, Hamburg 1914. — Müller-Kruppa, Lehrb. d. darst. Geometrie, Leipzig u. Berlin 1936, III. Teil, S. 361—366.

Geraden (OP) mit den Zylindern, die nicht mit P auf derselben Seite von O liegen, so erhält man ein zweites Bild von \bar{P} , das später noch erwähnt werden wird. Würden A und F schließlich auf verschiedenen Seiten von O gewählt, so erhielte man noch zwei weitere Bildpunkte von P .

Der Punkt V der Geraden (OP), für den der gerichtete Abstand $\overrightarrow{OV} = \overrightarrow{FA}$ ist, hat sein Bild im Fernpunkt der Geraden. Nennt man α den Spurzylinder und $\bar{\varphi}$ den Fluchtzylinder, so ist der mit ihnen koaxiale Drehzylinder ψ vom Radius $v = f - a$ der Verschwindungszylinder der Verwandtschaft.

Die Verwandtschaft ist bestimmt, wenn man das Zentrum O , den Spurzylinder α und ein Paar entsprechender Punkte P und \bar{P} (auf einem Halbstrahle durch O) kennt; denn aus (1) ergibt sich dann \bar{F} und somit $\bar{\varphi}$. — Die Verwandtschaft ist ferner bestimmt, wenn O , die Richtung der Zylinderachse z und zwei Paare entsprechender Punkte PP und QQ gegeben sind. Denn projiziert man die Punktepaare normal auf eine (etwa durch O gehende) zu z senkrechte Ebene π , wodurch man die Punktepaare $P'P'$ und $Q'Q'$ erhält, und dreht dann Q' und Q' um O nach Q_0 bzw. \bar{Q}_0 auf (OP'), so ergibt der zweite Doppelpunkt der beiden durch $OP'Q_0$ und $O\bar{P}'\bar{Q}_0$ gegebenen projektiven Punktreihen einen Punkt A von α .

a) Die planimetrische Verwandtschaft in π .

Die durch O und senkrecht zu z gehende (also horizontal gedachte) Ebene π schneidet α , $\bar{\varphi}$ und ψ in drei konzentrischen Kreisen, dem Spurhorizont a , dem Fluchthorizont \bar{f} und dem Verschwindungshorizont v .

Betrachten wir nun zunächst die durch obige Festlegung in π definierte planimetrische Verwandtschaft! Sind P und \bar{P} ein Paar entsprechender Punkte (in π ; s. Bild 2) und sind A und \bar{F} die Schnittpunkte des Halbstrahles (OP) mit a und \bar{f} , so ist — da das Doppelverhältnis, das je zwei entsprechende Punkte vereint liegender projektiver Punktreihen mit ihren Doppelpunkten bilden, gleich ist —

$$(OAP\bar{P}) = (OAF_\infty\bar{F}) \quad \dots \dots \dots (2);$$

dreht sich ein Halbstrahl um O , so ist stets $(OAF_\infty\bar{F}) = \frac{f-a}{f}$, wegen (2) also auch

$$(OAP\bar{P}) = \frac{f-a}{f}, \text{ woraus sich}$$

$$(OPAP\bar{P}) = \frac{a}{f} \quad \dots \dots \dots (3)$$

ergibt.

Ist nun (Bild 2) eine in π liegende Gerade g abzubilden, so zieht man zunächst durch O die Parallele zu g , die a in den Punkten A_1 und A_2 und \bar{f} in den beiden Fluchtpunkten G_1 und G_2 schneidet, die dem Fernpunkte G_∞ von g entsprechen.

Durchläuft nun ein Punkt P die Gerade g , so dreht sich der zur Abbildung der Punkte P verwendete Halbstrahl so, daß der auf ihm liegende Punkt A denjenigen zwischen A_1 und A_2 gelegenen Teil von a durchläuft, der auf derselben Seite von O liegt wie g . Daraus und aus der Gleichung (3) folgt, daß \bar{P} den zwischen \bar{G}_1 und \bar{G}_2 liegenden Teil eines Kegelschnittes \bar{g} durchläuft, der aus a durch eine zentrische Kollineation entsteht, die O zum Kollineationszentrum,

g zur Kollineationsachse und die Charakteristik $\frac{a}{f}$ hat. Da das Kollineationszentrum O der Mittelpunkt des zu transformierenden Kreises a ist, so ist O bekanntlich ein Brennpunkt aller \bar{g} . Die jeweilige durch O gehende Senkrechte zu g ist die Hauptachse von \bar{g} . Daraus, daß unser \bar{g} durch \bar{G}_1 geht, erkennt man, daß alle \bar{g} denselben Parameter f haben.

Dreht sich der Strahl weiter um O , so daß sein Punkt A den restlichen Teil von a durchläuft, so stellt der diesem Restteil von a in der genannten Kollineation entsprechende Teil von \bar{g} die Gesamtheit der obengenannten zweiten Bilder der Punkte der Geraden g dar. Nennen wir, da nun der Sachverhalt besprochen ist, wegen der Kürze der Ausdrucksweise den ganzen Kegelschnitt \bar{g} das Bild von g , so gilt der

Satz 1: Die (nicht durch O gehenden) Geraden in π bilden sich als ein System monofokaler Kegelschnitte (mit O als Brennpunkt) vom gleichen Parameter f ab.

Man erkennt ferner, daß man den oben genannten Kegelschnitt \bar{g} erhält, wenn man den Kreis \bar{f} mittels einer zentrischen Kollineation transformiert, für welche O das Kollineations-

zentrum, die Parallele zu g durch O die Kollineationsachse und $\bar{F}\bar{P}$ (s. Bild 2) ein Paar entsprechender Punkte sind. Daraus ergibt sich eine einfache konstruktive Lösung der Aufgabe, durch zwei gegebene Bildpunkte einen Kegelschnitt \bar{g} zu legen, d. h. der Aufgabe, einen Kegelschnitt zu konstruieren, von dem man den Brennpunkt, den Parameter und zwei Punkte kennt. Sind \bar{P} und \bar{Q} diese gegebenen Bildpunkte von \bar{g} , so ziehe man die Halbstrahlen $(O\bar{P})$ und $(O\bar{Q})$, die \bar{f} in den Punkten \bar{F}_P bzw. \bar{F}_Q schneiden. Die Gerade durch O und durch den Schnittpunkt der Geraden $(\bar{P}Q)$ und $(\bar{F}_P\bar{F}_Q)$ ist dann die Achse des eben besprochenen zentrischen Kollineation, die \bar{f} in den gesuchten Kegelschnitt überführt. (Dabei sei aufmerksam gemacht, daß die Aufgabe im allgemeinen vier Lösungen hat, wenn man nicht — wie hier für \bar{g} — die Voraussetzungen mit den Halbstrahlen macht.)

Eine andere Auffindung der Bildkegelschnitte \bar{g} ist später — vor II — angegeben.

Da der Parameter der Kegelschnitte \bar{g} konstant ist, so ist auch der Krümmungsradius im Hauptscheitel, der dem Parameter gleich ist, konstant²⁾.

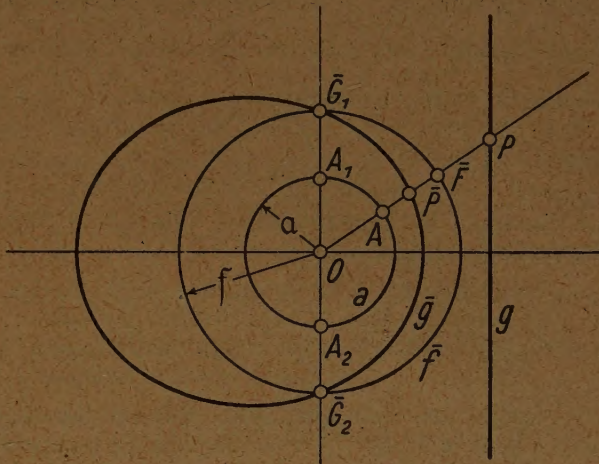


Bild 2.

b) Das Bild einer Geraden im Raum.

Zunächst erkennt man, daß alle Geraden durch O und die Erzeugenden des Zylinders α bei dieser Abbildung in sich selbst übergehen und daß den vertikalen Geraden ebensolche entsprechen. Jede allgemein gelegene Gerade g des Raumes hat in ihren Schnittpunkten mit α zwei Inzidenzpunkte, die durch O gehende Parallele zu g schneidet aus φ die beiden Fluchtpunkte \bar{G}_1 und \bar{G}_2 aus: durch die vier genannten Punkte muß das Bild \bar{g} der Geraden g gehen. Durch die gleichen Überlegungen wie unter a) erkennt man, daß man das Bild \bar{g} von g auf folgende Weise finden kann:

Man lege die Ebene $(Og) = \varepsilon$, die α in a_ε schneide und übe auf den Kegelschnitt a_ε jene zentrische Kollineation aus, die O zum Zentrum, g zur Kollineationsachse und die (für alle Geraden konstante) Charakteristik $\frac{a}{f}$ hat. Dann ist der so erhaltene Kegelschnitt \bar{g} das Bild von g . Legt man durch g die grundrißprojizierende Ebene, so ist ihr Bild ein vertikaler Zylinder, der durch einen Kegelschnitt des in Satz 1 genannten Systems geht; daraus folgt

Satz 2: Die zu z windschiefen Geraden des Raumes bilden sich als die Kegelschnitte ab, deren Ebenen durch O gehen und deren Grundrisse ein System von monofokalen Kegelschnitten (mit O als Brennpunkt) mit demselben Parameter f bilden.

Umgekehrt stellt jeder Kegelschnitt des Raumes, der diese Bedingung erfüllt, das Bild einer zu z windschiefen Geraden dar. Für eine Gerade g , die die Zylinderachse z (im Endlichen oder im Fernpunkt) schneidet, degeneriert der Kegelschnitt a_ε in 2 Zylindererzeugende, aus denen durch die oben beschriebene zentrische Kollineation 2 sich auf z schneidende Geraden entstehen. Dieses Geradenpaar, daß das Bild der z schneidenden Geraden g darstellt, kann man auch erhalten, indem man die beiden Verschwindungspunkte von g , in denen g den Zylinder φ schneidet, mit O verbindet und dieses Geradenpaar in der z -Richtung so verschiebt, bis es durch die entsprechenden Inzidenz- und Fluchtpunkte von g geht.

²⁾ Diese Eigenschaft ist für die Anwendung der Verwandtschaft als Bühnendarstellung von besonderem Vorteil; denn den zur Bühnenfront parallelen vertikalen Ebenen entsprechen als Bild vertikale Zylinder durch die \bar{g} ; ersetzt man nun diese in ihrem Teil auf der Bühne durch (im Hauptscheitel von \bar{g} oskulierende) Drehzylinder, so sind letztere wegen obiger Eigenschaft kongruent, d. h. dieselbe (als Teil eines Drehzylindersgebäude) Kulisse kann bei jeder Bühnentiefe mit Berechtigung Verwendung finden. — Dergleichen eben besprochene Vorteil ergibt sich bei der Darstellung z. B. eines Teiles eines kreisförmigen Innenraumes auf der Bühne, denn es gilt auch — wie etwa eine einfache Rechnung zeigt — der Satz: Das Bild eines Kreises in π (dessen Mittelpunkt mit M bezeichnet sei) ist eine Kurve 4. Ordnung, die in ihren auf (OM) gelegenen Scheiteln Krümmungskreise besitzt, deren Radien unabhängig von der Entfernung OM sind.

c) Das Bild einer Ebene.

Man erkennt zunächst, daß jede Ebene durch O in sich selbst übergeht. Jede allgemein gelegene Ebene ε hat in ihrem Schnitt mit dem Zylinder α einen Inzidenzkegelschnitt, die durch O gehende zu ε parallele Ebene schneidet aus $\bar{\varphi}$ den Fluchtkegelschnitt aus; durch beide eben genannte Kegelschnitte muß das Bild ε der Ebene ε gehen. In Fortsetzung der Betrachtung über das Bild einer Geraden findet man nun das Bild einer Ebene ε , indem man auf den Zylinder α jene zentrische Kollineation ausübt, von der O das Zentrum, ε die Ebene der Inzidenzpunkte und $\frac{a}{f}$ die (für alle Ebenen konstante) Charakteristik ist. Das Bild einer Ebene ist also ein Kegel 2. Grades, dessen Spitze \bar{S} — das zentrisch kollineare Bild des Fernpunktes S_{∞} von ε — auf der Achse z des Zylinders liegt und dessen Spurkurve in π man als Bild der Schnittgeraden $[\varepsilon \pi]$ finden kann.

Da diese Spurkurven in π nach Satz 1 den gleichen Parameter f und den Punkt O als gemeinsamen Brennpunkt haben, folgt unter Beachtung, daß $(\bar{S}O) = z$ senkrecht zu π steht, der zusammenfassende

Satz 3: Die (nicht durch O gehenden) Ebenen des Raumes bilden sich als ein System von Kegeln (einschließl. Zylinder) 2. Grades ab, die eine gemeinsame Fokalachse z besitzen und deren Spurkurven in der zu z senkrechten Ebene π den gleichen Parameter f haben.

Umgekehrt stellt ein solches System von Kegeln mit gemeinsamer Fokalachse z und mit einer Ebene π senkrecht z , in der alle Spurkurven der Kegel den gleichen Parameter haben, ein Abbild der (nicht durch $O = [z \pi]$ gehenden) Ebenen für eine solche oben beschriebene Abbildungsmethode dar.

Da jeder Schnitt eines solchen Kegels mit einer durch O gelegten Ebene das Bild einer Geraden liefern muß, so folgt aus Satz 2 und 3 der

Satz 4: Schneidet man einen Kegel 2. Grades mit Ebenen, die durch einen festen Punkt seiner Fokalachse gehen, so sind die auf eine zur Fokalachse senkrechten Ebene normal projizierten Schnittkurven Kegelschnitte mit dem gleichen Parameter. Die Projektion der Fokalachse ist ihr gemeinsamer Brennpunkt.

Der Schnitt der Ebene ε mit dem Zylinder ψ ist der Verschwindungskegelschnitt von ε . Sein Bild ist der Fernkegelschnitt des Kegels $\bar{\varepsilon}$. Man erhält daher auch $\bar{\varepsilon}$, indem man den Verschwindungskegelschnitt von ε aus O projiziert und den durch diese Projektionsstrahlen gebildeten Kegel in der z -Richtung so verschiebt, bis er durch den Inzidenz-(und Flucht-)kegelschnitt von ε geht.

Wie bereits früher erwähnt, bilden sich vertikale Ebenen als Zylinder mit vertikalen Erzeugenden ab; das Bild von horizontalen Ebenen sind Drehkegel³⁾.

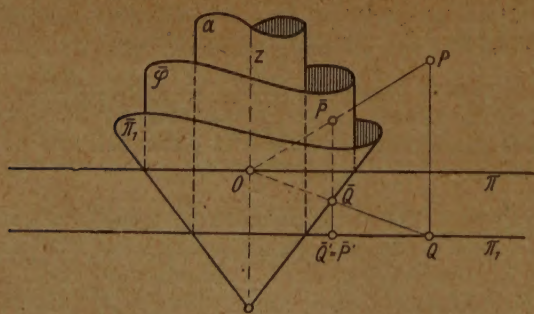


Bild 3.

Man kann nun eine einfache Methode angeben, um mit Hilfe eines solchen Drehkegels aus dem Grundriß eines Objektes den Grundriß seines Rundreliefs zu ermitteln: Wählen wir dazu eine beliebige zu π parallele Ebene π_1 (Bild 3) als Grundrißebene. Ihr Bild $\bar{\pi}_1$ ist, wie eben besprochen, ein Drehkegel mit der Achse z , der durch f (in π) und den Schnittpunkt von π_1 mit α geht. Bezeichnet man den Grundriß eines Punktes P auf die Ebene π_1 mit Q , so ist der (auf derselben Seite von O wie Q gelegene)⁴⁾ Schnitt des Strahles (OQ) mit dem Kegel π_1 das Bild \bar{Q} von Q ; da der vertikalen Geraden (PQ) eine ebensolche durch \bar{Q} entspricht, ist der Grundriß \bar{Q}' des Punktes \bar{Q} mit dem Grundriß \bar{P}' des Bildes P von \bar{P} identisch.

Um also den Grundriß des Reliefbildes eines Objektes zu erhalten, projiziert man den in der (nicht durch O gehenden) horizontalen Ebene π_1 liegenden Grundriß des Objektes durch

³⁾ Für ein Bühnenbild ist die Darstellung durch Teile von Kegelflächen leicht möglich; meist kommen sogar nur die Abbilder vertikaler und horizontaler Ebenen vor. Die Decke eines Innenraumes wäre also als Teil einer zeltartigen Überdachung darzustellen, wie diese auf Bühnenbildern bisweilen zu sehen ist. Damit das Bild des Fußbodens höchstens um Geringes von einer horizontalen Ebene abweicht, wird O nicht hoch über diesem gewählt werden.

⁴⁾ Der 2. Schnittpunkt mit π_1 bedeutet das früher genannte zweite Bild von Q .

Halbstrahlen aus O auf den Drehkegel π_1 ; der Grundriß dieser Projektion ist der gesuchte Grundriß des Reliefbildes.

Insbesondere findet man das Bild einer in π liegenden Geraden g nun einfach, indem man durch O und durch den Grundriß von g (auf π_1) eine Ebene legt und diese mit dem Kegel π_1 zum Schnitt bringt. Die Normalprojektion dieser Schnittkurve auf π ist das gesuchte Bild von g .

Über Verallgemeinerungen

des bisher besprochenen Abbildungsverfahrens sei nun im folgenden berichtet:

II.

Wir wählen als Spurzylinder einen (vertikal gedachten) Zylinder 2. Grades α und als Fluchtzylinder \bar{f} einen zu α bezüglich eines Auges O ähnlich gelegenen Zylinder mit dem Ähnlichkeitsverhältnis $a:f$. Legt man durch O die horizontale Ebene π , dann sind in π der Spurhorizont a und der Fluchthorizont \bar{f} nun 2 bezüglich O ähnlich gelegene Kegelschnitte und in Analogie zu früher ergibt sich, daß die Bilder der Geraden g in π Kegelschnitte \bar{g} sind, die aus a durch eine zentrische Kollineation hervorgehen, von der O das Kollineationszentrum, g die Kollineationsachse und $\frac{a}{f}$ die Charakteristik ist. Man erkennt leicht, daß auch im jetzigen Falle die Bilder von Geraden des Raumes Kegelschnitte und die Bilder von Ebenen im allgemeinen wieder Kegel 2. Grades sind.

Das System der Kegelschnitte \bar{g} in π wird in dem jetzigen Falle nicht aus Kegelschnitten mit demselben Parameter bestehen. Ein bekannter Satz⁵⁾ sagt aus, wie man den Krümmungsradius $\bar{\rho}$ in einem Punkt \bar{P} einer Kurve \bar{g} findet, die durch zentrische Kollineation aus einer Kurve a entstanden ist, wenn der Krümmungsradius ρ in dem Punkt A von a , dem der Punkt \bar{P} entspricht, bekannt ist. Legt man (Bild 4) eine zu g parallele Tangente an a , die a im Punkt A berührt, so ergibt sich für unseren Fall, daß \bar{g} in dem Punkte \bar{P} , der dem Punkt A entspricht und in dem die Tangente an \bar{g} wieder zu g parallel ist, einen Krümmungsradius $\bar{\rho} = \frac{f}{a} \cdot \rho$ besitzt.

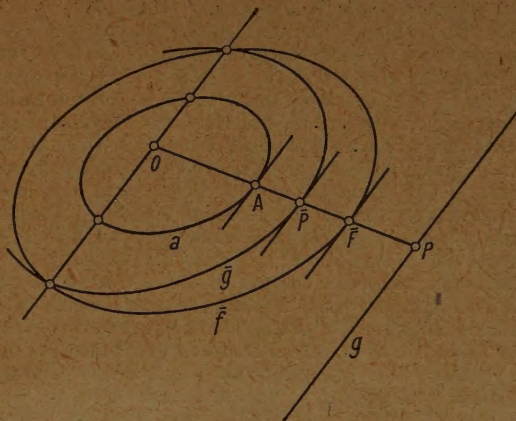


Bild 4.

Die Bildkegelschnitte von parallelen Geraden haben also in ihren Schnittpunkten mit der so erhaltenen Geraden (OA) konstante Krümmungsradien. Sie sind so groß wie der Krümmungsradius von \bar{f} in dem Schnittpunkt \bar{F} der Geraden (OA) mit \bar{f} .

III.

Als nächste Verallgemeinerung der Voraussetzungen unter I betrachten wir einen Sonderfall der eben besprochenen Abbildung II, der darin besteht, daß wir O im Brennpunkt des Kegelschnittes a wählen (Bild 5). O ist dann auch der Brennpunkt von \bar{f} ; a und \bar{f} können als die Parameter von a bzw. \bar{f} gewählt werden; α und \bar{f} sind nun zwei Zylinder 2. Grades mit der gemeinsamen Fokalachse z .

Die Abbildung der in π liegenden Geraden g kann man nun entweder so vornehmen, daß man auf a die bekannte zentrische Kollineation mit der Charakteristik $\frac{a}{f}$ ausübt oder man kann die Abbildung der g auf die im letzten Absatz vor II angeführte Art durchführen. Der nun dabei verwendete Kegel



Bild 5.

π_1 hat seine Spitze auf z und geht durch \bar{f} , so daß z seine Fokalachse und O ein Punkt auf dieser ist. Daher sind für die Kegelschnitte \bar{g} nun die Voraussetzungen für den Satz 4 gegeben und durch Vergleich der beiden Methoden findet man schließlich

Satz 5: Transformiert man einen Kegelschnitt aus seinem Brennpunkt mittels zentrischer Kollineation mit derselben Charakteristik, so haben die

⁵⁾ Siehe Geisenheimer, Zeitschrift f. Mathematik u. Physik, Bd. 25 (1880) S. 214.

resultierenden Kegelschnitte denselben Parameter. Ist p der Parameter des gegebenen Kegelschnittes, c der Wert der Charakteristik, so ist der Parameter der resultierenden Kegelschnitte $p^* = \frac{p}{c}$.

Der Punkt O ist der Brennpunkt aller Kegelschnitte \bar{g} . Aus Satz 5 ergibt sich also, daß die Gesamtheit der Bildkegelschnitte \bar{g} (in π) für die Abbildung unter Voraussetzung III identisch^{a)} ist mit der, die man für die Voraussetzung I erhält und die in Satz 1 angegeben ist. Nur die individuelle Zuordnung je einer Geraden und eines Kegelschnittes ist verschieden.

Daraus folgt weiter, daß auch die Gesamtheit der Bilder aller Geraden im Raum und die aller Ebenen für die Abbildungsvoraussetzungen III identisch sind mit den entsprechenden Mannigfaltigkeiten für die Abbildungsvoraussetzungen bei I, die in den Sätzen 2 und 3 angegeben sind.

^{a)} Bei gleicher Wahl des Parameters f von \bar{f} ; sonst bis auf Ähnlichkeitstransformationen.

BUCHBESPRECHUNGEN

Dr. Josef Lense (o. Prof. a. d. Techn. Hochschule München), Vorlesungen über höhere Mathematik. 260 S. mit 102 Abb. München 1948. Leibniz-Verlag. Preis geb. 20,— DM.

Das Buch bietet eine Zusammenfassung der Vorlesungen über höhere Mathematik, wie sie Verf. an der Münchener Hochschule gehalten hat. Es setzt sich aus zwei Teilen zusammen, deren erster den Stoff bringt, der von allen Ingenieuren und Physikern zu verlangen ist. Dieser Teil gliedert sich in 3 Abschnitte: 1. Analytische Geometrie der Ebene, Infinitesimalrechnung von Funktionen einer Veränderlichen, mit Anwendungen auf die Theorie der Kurven; 2. Einführung in die analytische Geometrie des Raumes in vektorieller Darstellung, Infinitesimalrechnung für Funktionen mehrerer Veränderlicher mit Anwendung auf Raumkurven und Flächen, Integralsätze der Vektorrechnung. 3. Funktionen komplexer Veränderlicher, Differentialgleichungen mit Anwendungen. Ein zweiter Teil behandelt als Ergänzung: Determinanten und Matrizen, systematische Integrationsmethoden, ferner ziemlich eingehend Abschnitte der Funktionentheorie und der Theorie der konformen Abbildungen, schließlich einiges aus der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen. Nach Ansicht des Verf. würde dieser Stoff auch für Kandidaten des höheren Lehramtes reichen, falls noch ein ergänzendes Studium auf dem Gebiete der Algebra und Geometrie hinzukäme.

Die Darstellung, die oft andere als die üblichen Wege geht, ist außerordentlich klar, aber, da das Buch nicht zum Selbststudium sondern zum Gebrauch neben der Vorlesung bestimmt ist, sehr knapp gehalten. Der Stoff ist von den Grundlagen aus streng logisch aufgebaut. Im wesentlichen ist das gegeben, was auch nach Ansicht des Referenten dem angehenden Ingenieur und Physiker geboten werden sollte. Einiges vermißt man. So scheint es mir doch nötig, daß der Ingenieur, der eine höhere mathematische Ausbildung benötigt, und vor allem der Physiker

z. B. etwas über Variationsrechnung, etwas mehr über partielle Differentialgleichungen, über Näherungsmethoden und ihre praktische Anwendung usw. hört.

Auf jeden Fall ist das Erscheinen dieses ausgezeichneten Buches sehr zu begrüßen. Auch wenn genügend Hochschullehrbücher vorhanden wären, würde es eine wertvolle Bereicherung unserer Lehrbuchliteratur sein. Möchte es in die Hand vieler unserer Studierenden kommen.

Dresden.

Willers.

Mathematische Nachrichten, Publikationen des Forschungsinstitutes für Mathematik der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin und der mathematischen Institute der Universität Berlin. Herausgegeben von Erhard Schmidt gemeinsam mit Georg Hamel, Helmut Hasse, H. L. Schmid und Kurt Schröder. 1. Band Heft 1. Berlin 1948. Akademie-Verlag. Preis je Heft 7,— DM.

Diese neue mathematische Zeitschrift ist wohl als Fortsetzung der Schriften des mathematischen Seminars und des Institutes für angewandte Mathematik der Universität Berlin anzusehen. Sie soll jährlich in zwei Bänden zu 6 Heften erscheinen. Das erste Heft hat einen Umfang von 80 Seiten. Zur Charakterisierung seines Inhaltes seien die Titel der in ihm gebrachten Arbeiten angeführt: O. Grün, Beiträge zur Gruppentheorie III; R. Kochendörffer, Über treue reduzible Darstellungen endlicher Gruppen; H. Hasse, Existenz und Mannigfaltigkeit abelscher Algebren mit vorgegebener Galoisgruppe über einem Teilkörper des Grundkörpers. I; F. W. Schäfke, Eine Eigenschaft der charakteristischen Kurven gewisser Eigenwertaufgaben mit zwei linearen Parametern; F. W. Schäfke, Über die Wirkung der drei Kopplungsarten zweier frei schwingender Systeme.

Die Satzanordnung ist sehr übersichtlich. Druck und Ausstattung der neuen Zeitschrift sind gut.

Dresden.

Willers.

Die besprochenen und angezeigten Bücher sind durch den Buchhandel zu beziehen.

NACHRICHTEN

Aachen: Dozent Dr. rer. nat. habil. Alfred Rößler, früher Deutsche Technische Hochschule Prag, dann Phil.-theol. Hochschule Passau, hat sich für das

Fach Mathematik unter besonderer Berücksichtigung der darstellenden Geometrie an die Rhein.-Westf. Technische Hochschule Aachen umhabilitiert.

Verantwortlich für den Inhalt: Prof. Dr. Fr. A. Willers, Dresden; für den Verlag: H. Kaesser, Berlin. Verlag: Akademie-Verlag GmbH., Berlin NW 7, Schiffbauerdamm 19, Fernsprecher: 42 64 12 und 42 69 18. Postscheckkonto: Berlin 35 021. Bestell- und Verlagsnummer dieses Heftes: 1009/28/10. Die Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik erscheint monatlich. Bezugspreis: vierteljährlich DM 15.— zuzüglich Bestellgeld, Einzelheft DM 6.—. Verantwortlich für den Anzeigentell: Curt F. W. Schreiber, Berlin. Druck: Julius Beltz, Langensalza. 57 273/4022 — Nr. 1065. — Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 245 der Sowjetischen Militär-Verwaltung in Deutschland.